12e ANNÉE JANVIER 1958 N° 1

CABLES & TRANSMISSION

REVUE TRIMESTRIELLE PUBLIÉE PAR

SOTELEC

Société mixte pour le développement de la technique des Télécommunications sur câbles

Société à responsabilité limitée au capital de 1.008.000 francs

16, RUE DE LA BAUME, PARIS - VIIIe

GROUPANT

L'ADMINISTRATION DES POSTES, TÉLÉGRAPHES & TÉLÉPHONES

LA COMPAGNIE GÉNÉRALE D'ÉLECTRICITÉ (C. G. E.)
54, RUE LA BOÉTIE, PARIS - VIIIe

LA SOCIÉTÉ LIGNES TÉLÉGRAPHIQUES ET TÉLÉPHONIQUES (L. T. T.)
89, RUE DE LA FAISANDERIE, PARIS - XVIe

LA SOCIÉTÉ ALSACIENNE DE CONSTRUCTIONS MÉCANIQUES (S. A. C. M.)
69, RUE DE MONCEAU, PARIS - VIIIe

LA SOCIÉTÉ ANONYME DE TÉLÉCOMMUNICATIONS (S. A. T.)
41, RUE CANTAGREL, PARIS - XIIIe

Sommaire

ADMINISTRATION DES POSTES, TÉLÉGRAPHES ET TÉLÉPHONES

MINISTÈRE DES P.T.T. : 20, AVENUE DE SÉGUR, PARIS (7e) - TÉL. - SÉGUR 16-40

DIRECTION GÉNÉRALE DES TÉLÉCOMMUNICATIONS : **20, Avenue de Ségur, PARIS (7e)** - Tél. : SÉGur 16-40

CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS : **3, Avenue de la République, ISSY-LES-MOULINEAUX (Seine)** - Tél. : LECourbe 40-00.

SERVICE DES LIGNES A GRANDE DISTANCE : **24, Rue Bertrand, PARIS (7e)** - Tél. - SUFfren 89-00

COMPAGNIE GÉNÉRALE D'ÉLECTRICITÉ

54, RUE LA BOÉTIE, PARIS (8e) - TÉL. : ÉLYSÉES 48-01

FILIALE DE MATÉRIELS DE TÉLÉPHONIE : COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES TÉLÉPHONES

DIRECTION GÉNÉRALE - SERVICE COMMERCIAL : **2, Rue de l'Ingénieur-Robert-Keller, PARIS (15e)** - Tél. : VAUgirard 38-70 et LECourbe 49-40.

USINES ET LABORATOIRES **2, Rue de l'Ingénieur-Robert-Keller et 33, Rue Emeriau, PARIS (15e)** - Tél. : VAUgirard 38-70 et LECourbe 49-40. - **1, Rue Frédéric-Sauvage, TOURS (Indre-et-Loire)** - Tél : Tours 60-85. - **Rue Clément-Ader, AIX-LES-BAINS (Savoie)** - Tél. : Aix-les-Bains 13-61

MANUFACTURE DE FILS ET CABLES ELECTRIQUES : LES CABLES DE LYON

DIRECTION GÉNÉRALE - SERVICE COMMERCIAL . **170, Avenue J.-Jaurès, LYON (Rhône)** - Tél. - PArmentier 35-61

BUREAU DE PARIS : **56, Rue La Boétie, PARIS (8e)** - Tél. : ÉLYsées 24-41.

USINES : **170, Avenue J.-Jaurès, LYON (Rhône)** - Tél. : PArmentier 35-61. - **49 bis, Rue J.-Jaurès, BEZONS (S.-&-O.)** - Tél. WAGram 99-28. - **4, Quai de la Loire, CALAIS (Pas-de-Calais)** - Tél. Calais 3-27 - **Les Cadolles, BOURG (Ain)** Tél. : Bourg 15-10.

LIGNES TÉLÉGRAPHIQUES ET TÉLÉPHONIQUES

89, RUE DE LA FAISANDERIE, PARIS (16e) - TÉL. : TROCADÉRO 45-50

DIRECTION, SERVICES COMMERCIAUX & D'INSTALLATION, LABORATOIRES : **89, R. de la Faisanderie, PARIS (16e)** - Tél. : TROcadéro 45-50.

USINE : **CONFLANS-Ste-HONORINE (S.-&-O.)** - Tél. ARGenteuil 31-72 et 31-73. Conflans 78 et 108.

ANNEXE D'AFRIQUE DU NORD

SERVICES COMMERCIAUX & D'INSTALLATION : **62, Boulevard du Telemly, ALGER** - Tél. : 494-32 et 494-33

USINE . **MAISON-CARRÉE (Dépt d'Alger)** - Tél. - Alger 750-88.

SOCIÉTÉ ALSACIENNE DE CONSTRUCTIONS MÉCANIQUES

DÉPARTEMENT ENERGIE NUCLÉAIRE, TÉLÉCOMMUNICATIONS, ELECTRONIQUE

69, RUE DE MONCEAU, PARIS (8e) - TÉL. : LABORDE 60-50

LABORATOIRES : **51, Rue de l'Amiral-Mouchez, PARIS (13e)** - Tél. : GOBelins 85-90.

CABLERIE DE CLICHY : **152, Quai de Clichy, CLICHY (Seine)** - Tél. : PÉReire 39-00.

USINE D'ARCUEIL : **1, Avenue Aristide-Briand, ARCUEIL (Seine)** - Tél. : ALÉsia 41-20.

USINE DE LILLE : **62, Boulevard de Belfort, LILLE (Nord)** - Tél. : 53.05.19.

SOCIÉTÉ ANONYME DE TÉLÉCOMMUNICATIONS

41, RUE CANTAGREL, PARIS (13e) - TÉL. : PORT-ROYAL 37-29

DIRECTION, SERVICE COMMERCIAL, LABORATOIRES : **41, Rue Cantagrel, PARIS (13e)** - Tél. PORt-Royal 37-29.

USINES : **16 et 41, Rue Cantagrel, PARIS (13e)** **101 bis, Avenue Rouget-de-l'Isle, VITRY-s/SEINE (Seine). Route de la Châtre, MONTLUÇON (Allier) - Câblerie de Riom, RIOM (Puy-de-Dôme).**

AGENCE D'AFRIQUE DU NORD : **23, Chemin Picard, ALGER** - Tél. . 60-288.

FILTRES D'AIGUILLAGE

par J. OSWALD,

Chef de Laboratoire

à la **Compagnie Industrielle des Téléphones**

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé l'essentiel de la théorie des filtres d'aiguillage d'impédance constante (aiguillages stricts), établie par Cauer et Piloty, l'auteur complète cette théorie sur certains points, en particulier par la considération de la matrice de répartition des aiguillages stricts et par un développement, plus complet que celui de Cauer, concernant la synthèse des aiguillages à partir des fonctions-images (solution de Brandt). Il est montré dans l'exposé que l'utilisation des fonctions d'affaiblissement sur images, au lieu de fonctions d'affaiblissement effectif (préférées par Cauer), permet une spécification aisée des aiguillages ainsi que certaines généralisations particulièrement utiles au technicien : la théorie est appliquée à quelques exemples simples d'aiguillages passe-haut, passe-bas, passe-bande et coupe-bande, ainsi qu'à la mise en parallèle (ou en série) des filtres de bande, ce dernier problème, dont aucune solution complète n'a encore été donnée, étant une généralisation de celui des aiguillages classiques passe-bas et passe-haut. Le dernier chapitre de l'exposé est consacré aux aiguillages octopôles, constitués de deux filtres passe-bas et de deux filtres passe-haut et ne comportant pas de transformateur différentiel. La théorie de cet octopôle, qui constitue une généralisation de celle de l'hexapôle, semble nouvelle.

PLAN

I. — INTRODUCTION : GÉNÉRALITÉS SUR LE PROBLÈME DES FILTRES D'AIGUILLAGE.

Le problème de l'association de deux ou plusieurs réseaux réactifs se présente très fréquemment dans la technique des télécommunications. La séparation des différentes bandes de fréquences utilisées pour transmettre les voies ou groupes de voies téléphoniques est réalisée, dans les stations terminales ou intermédiaires d'amplification, par des filtres disposés soit en série, soit en parallèle. Il est bien connu que ce groupement ne peut être effectué sans des précautions particulières, les différents filtres pouvant se perturber mutuellement s'ils sont spécifiés indépendamment les uns des autres. Le rôle des filtres d'aiguillage est d'assurer une séparation correcte des différentes bandes de fréquence transmises tout en conservant, dans les bandes utiles, une impédance régulière et approximativement constante aux différentes bornes d'accès.

Une solution fréquemment utilisée consiste à opérer le groupement des filtres individuels en masquant les défauts d'adaptation au moyen d'un réseau auxiliaire non réactif. On peut dans certains cas utiliser un pont de résistances convenables, ou encore un transformateur différentiel (plus généralement un ensemble de différentiels, ou coupleur). Cette solution a le mérite de la simplicité. Elle a l'inconvénient de nécessiter un affaiblissement additionnel constant, qui est au moins égal à 0,35 N dans le cas le plus favorable. Très souvent un affaiblissement aussi important ne peut être toléré.

Une autre solution consiste à spécifier les filtres indépendamment les uns des autres, puis à modifier les éléments les plus voisins de la terminaison commune, pour diminuer la perturbation que chacun des filtres apporte à l'autre (ou aux autres). C'est la méthode bien connue de Zobel [1] qui a été perfectionnée par Bode [2] ; le principe de ces méthodes est le suivant.

L'impédance (ou admittance) effective $w_{e1} = r_1 + jx_1$ de l'un des filtres F_1 comporte, dans la bande passante de ce filtre, un terme réel r_1 prépondérant ; dans la même bande de fréquences, l'autre filtre F_2 est d'impédance (admittance) effective pratiquement imaginaire jx_2 et, dans certaines conditions, la somme $x_1 + x_2$ est petite car x_1 et x_2 sont de signes opposés. En modifiant les éléments terminaux des deux filtres, avec adjonction éventuelle d'un dipôle réactif en série ou en shunt, on parvient à rendre très petite la partie imaginaire de l'impédance (admittance) effective mesurée aux bornes communes. L'avantage de cette méthode est de n'exiger qu'une modification mineure des éléments constitutifs des deux filtres F_1, F_2, qui peuvent être spécifiés indépendamment l'un de l'autre. Par contre, la méthode de correction n'est pas rigoureuse et son efficacité peut être assez médiocre au voisinage des fréquences de coupure. Ceci n'est guère surprenant, car la théorie de Bode repose sur l'étude des impédances-images, qui sont soit purement réelles, soit purement imaginaires, alors que les impédances effectives, qui ont seules un sens physique, ont toujours une partie réelle et une partie imaginaire.

La possibilité d'une compensation partielle des termes imaginaires de l'impédance des deux filtres étant établie, il est permis de se demander si une compensation totale n'est pas possible et, en d'autres termes, si un aiguillage, possédant à ses bornes communes une impédance effective constante

et réelle à toute fréquence, est physiquement réalisable ou non. La réponse est affirmative et des méthodes diverses permettent de construire des aiguillages d'impédance constante. Un procédé, utilisant deux filtres réciproques (schémas se correspondant par dualité) et un ou plusieurs transformateurs différentiels, a été proposé par divers techniciens [3]. La théorie de ces aiguillages (octopôles et hexapôles différentiels) a été établie en particulier par W. Cauer [4]. De tels schémas n'introduisent pas d'affaiblissement additionnel, mais nécessitent un transformateur différentiel et un assez grand nombre d'éléments. En particulier, ils comportent généralement autant d'inductances que de capacités. Nous les laisserons de côté dans cette étude, quoiqu'ils présentent l'intérêt, sur le plan pratique, d'être d'une spécification simple et, sur le plan théorique, de constituer une généralisation des treillis symétriques ordinaires.

Des aiguillages d'impédance constante peuvent être également construits, par mise en série ou en parallèle de réseaux en échelle sans transformateur. Le premier exemple de tels aiguillages a été donné par W. Brandt [5]. Brandt utilise systématiquement les fonctions classiques d'affaiblissement sur images, de sorte que la théorie apparaît comme une généralisation de celle des filtres en échelle ordinaires. Les aiguillages ainsi constitués ne sont pas nécessairement les plus économiques, car ils reposent sur un choix particulier des fonctions caractéristiques de l'affaiblissement et de l'impédance.

En 1937, Norton [6] a montré qu'il était possible de construire des aiguillages d'impédance constante, sans faire usage des fonctions-images classiques. Le travail de Norton a suscité un gros intérêt, car il a préparé le chemin qui devait conduire à la spécification des filtres improprement appelés *de synthèse*, filtres construits à partir des grandeurs effectives (affaiblissement composite, impédance effective). A la suite des travaux de Norton, la théorie complète des aiguillages d'impédance constante a été établie, entre 1937 et 1940, par Cauer ([7], [9]) et H. Piloty ([8], [10]). Les principaux résultats sont rassemblés dans l'ouvrage classique de Cauer [4]. Nous rappellerons, dans les deux chapitres suivants, l'essentiel de cette théorie, en la complétant sur certains points (matrice de répartition des aiguillages stricts). Mais alors que Cauer donne la préférence aux aiguillages d'impédance constante *de synthèse*, dont l'affaiblissement composite réalise la meilleure approximation au sens de Tchebycheff, nous insisterons davantage sur la solution de Brandt (synthèse à partir des fonctions-images). En effet, si la solution de Brandt n'est pas en général la plus économique, elle présente plusieurs avantages : elle conduit à une spécification plus simple, la matrice d'impédance étant immédiatement connue, et surtout elle est susceptible d'une généralisation extrêmement intéressante (aiguillages à coupures distinctes, d'impédance approximativement constante). Cette généralisation a été signalée incidemment par Cauer dans son ouvrage, mais nous lui donnons ici, au chapitre IV, un développement bien plus complet comportant quelques résultats nouveaux.

Le chapitre V est consacré aux aiguillages passe-bande, coupe-bande, qui dérivent des aiguillages passe-bas, passe-haut, par une transformation de réactances classique, dont nous donnons une généralisation, valable si les fréquences de coupure sont différentes.

Le chapitre VI donne un bref aperçu du problème de la mise en parallèle des filtres de bande, problème qui n'a guère reçu de solution véritablement satisfaisante jusqu'à ce jour ; la nouvelle méthode proposée est, d'ailleurs, d'une application difficile dès que la classe des filtres est élevée. Il est néanmoins intéressant de rapprocher ce problème de celui des aiguillages classiques passe-haut, passe-bas, car il en constitue une généralisation.

Enfin le chapitre VII est consacré aux aiguillages octopôles d'impédance constante. Ces dispositifs (appelés par V. Belevitch réseaux *biconjugués*) ne semblent pas avoir fait, jusqu'à ce jour, l'objet d'une étude systématique. Les seuls exemples cités par Cauer dans son ouvrage concernent les octopôles formés de deux filtres inverses et de deux transformateurs différentiels (cf. ch. IX, §§ 1 à 3), schémas qui constituent une généralisation des réseaux symétriques en treillis et qui ont été introduits par Laurent [3]. Nous étudions ici, au contraire, les octopôles constitués par la mise en parallèle ou en série de deux filtres passe-bas et de deux filtres passe-haut et dont l'affaiblissement n'est pas assuré, comme dans le cas précédent, par l'équilibrage d'un montage différentiel. L'intérêt technique de ces montages est évident ; par ailleurs, la théorie montre que l'utilisation des fonctions-images classiques pour la spécification de ces aiguillages octopôles est particulièrement recommandable. Là encore, on obtient une généralisation des résultats obtenus dans le cas de l'hexapôle, avec certaines restrictions qui seront mises en évidence dans la suite de l'exposé.

II. — FONCTIONS ET POLYNOMES CARACTÉRISTIQUES DES QUADRIPOLES DE RÉACTANCES.

La théorie des filtres d'aiguillage est intimement liée à celle de la construction des filtres à partir des grandeurs effectives : affaiblissement effectif (ou composite), affaiblissement de réflexion effectif. Ce chapitre a pour but de rappeler l'essentiel de cette théorie.

2.1. Relation entre les matrices Z, Y et les fonctions-images.

Nous avons déjà rappelé, dans un autre article [11], les relations unissant les grandeurs caractéristiques d'un quadripôle aux fonctions-images (affaiblissement sur images, impédances-images). Ces relations seront encore utilisées dans la suite, c'est pourquoi nous les reproduisons à nouveau ici, sans démonstration. Nous suivrons, pour le reste, avec des notations à peu près identiques, la démonstration donnée par Cauer dans son ouvrage [4].

Soit θ, l'exposant de transfert sur images d'un quadripôle réactif, w_1, w_2 ses impédances-images normées, c'est-à-dire rapportées à une résistance de référence R. En posant $q = \coth \theta$, $w = \sqrt{w_1 w_2}$, les matrices d'impédance et d'admittance normées peuvent s'écrire :

(1.1) $$Z_1 = \begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} w_1 q & w\sqrt{q^2-1} \\ w\sqrt{q^2-1} & w_2 q \end{Vmatrix} \qquad Y_2 = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} q/w_1 & -\sqrt{q^2-1}/w \\ -\sqrt{q^2-1}/w & q/w_2 \end{Vmatrix}.$$

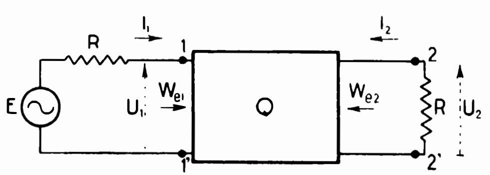


Fig. 1. — *Quadripôle inséré entre résistances ohmiques.*

Supposons le quadripôle inséré entre une source de force électromotrice E, d'impédance interne R, et une résistance d'utilisation R (*fig.* 1). On peut supposer les résistances terminales égales, en incorporant éventuellement un transformateur dans le quadripôle. Les grandeurs effectives qui sont couramment utilisées sont :

— les impédances effectives d'entrée et de sortie, qu'on écrira sous forme normée,

(1.2) $$\begin{cases} w_{e1} = \dfrac{W_{e1}}{R} = z_{11} - \dfrac{z^2_{12}}{1+z_{22}} = \dfrac{w^2 + q w_1}{1 + q w_2} \\[2ex] w_{e2} = \dfrac{W_{e2}}{R} = z_{22} - \dfrac{z^2_{12}}{1+z_{11}} = \dfrac{w^2 + q w_2}{1 + q w_1} \end{cases} ;$$

— le rapport de transfert des courants,

(1.3) $$M = e^{\Gamma_m} = I_1/(-I_2) = (y_{11} + y_{11}y_{22} - y_{12}^2)/(-y_{12}) = (1 + q w_2)/w\sqrt{q^2-1} = (1 + z_{22})/z_{12} ;$$

— le rapport de transfert des tensions,

(1.4) $$N = e^{\Gamma_n} = U_1/U_2 = (z_{11} + z_{11} z_{22} - z_{12}^2)/z_{12} = (w^2 + q w_1)/w\sqrt{q^2-1} = (1 + y_{22})/(-y_{12}).$$

— l'exposant effectif de transfert Γ (dont la partie réelle est l'affaiblissement effectif ou *composite*) :

(1.5) $$S = e^{\Gamma} = \frac{M+N}{2} = \frac{(1+z_{11})(1+z_{22}) - z_{12}^2}{2 z_{12}} = \frac{w^2 + 1 + q(w_1 + w_2)}{2 w\sqrt{q^2-1}} .$$

— l'exposant effectif de réflexion Γ_r (cologarithme du coefficient de réflexion effectif),

(1.6) $$T = e^{\Gamma_r} = \frac{w_{e1}+1}{w_{e1}-1} = \frac{z_{11} + z_{22} + w^2 + 1}{z_{11} - z_{22} + w^2 - 1} = \frac{w^2 + 1 + q(w_1 + w_2)}{w^2 - 1 + q(w_1 - w_2)} .$$

On en déduit la fonction φ, qui joue un rôle important dans la théorie :

$$\varphi = S/T = [w^2 - 1 + q(w_1 - w_2)]/\, 2 w\sqrt{q^2-1} .$$

Cette fonction φ est appelée parfois *fonction d'écho.*

Notons que les impédances effectives sont directement liées aux rapports M et N. En effet, en rapprochant les formules (1.2), (1.3), (1.4), on voit immédiatement que :

(1.7) $$w_{e1} = N/M.$$

On aurait une formule analogue pour w_{e2}, en inversant les paires de bornes.

Par définition même des rapports M et N la partie réelle du produit $M\overline{N}$ est égale à 1 pour un quadripôle de réactances. En effet, les barres désignant les quantités conjuguées, on a :

$$U_2 \overline{I}_2 = \overline{U}_2 I_2 = -R\, I_2 \overline{I}_2 .$$

Le quadripôle n'étant pas dissipatif, la puissance réelle est intégralement transmise, ce qui s'écrit :

$$[U_1 \overline{I}_1 + \overline{U}_1 I_1]/2 = [N\overline{M} + \overline{N}M]\, U_2 \overline{I}_2/2 = U_2 \overline{I}_2, \qquad \text{d'où :} \quad [N\overline{M} + \overline{N}M]/2 = \mathcal{R}e\,(N\overline{M}) = 1 .$$

On en déduit, si A désigne l'affaiblissement composite, (partie réelle de Γ) et A_r l'affaiblissement de réflexion (partie réelle de Γ_r), la relation classique :

(1.8) $$e^{-2A} + e^{-2A_r} = 1 \qquad (|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1) \begin{cases} \rho : \text{coefficient de réflexion effectif,} \\ \tau : \text{coefficient de transmission effectif.} \end{cases}$$

et d'après (1.7) :

(1.9) $$\mathcal{R}e\,(w_{e1}) = 1/|M|^2 = |I_2|^2/|I_1|^2 ; \qquad \mathcal{R}e\,(1/w_{e1}) = 1/|N|^2 = |U_2|^2/|U_1|^2 .$$

2.2. **Polynômes caractéristiques des rapports de transfert effectifs.**

D'après la relation (1.3), le rapport de transfert des courants M est une fonction rationnelle de la fréquence, ou plus généralement de la variable $p = \sigma + j\omega$. On peut donc l'écrire sous la forme d'un quotient de deux polynômes :

(1.10) $$M = (1 + z_{22})/z_{12} = g_m(p)/f_m(p) .$$

Or, z_{22} étant une réactance, $1 + z_{22}$ ne peut s'annuler dans le demi-plan de droite ($\mathcal{R}e(p) > 0$) ni sur la frontière ($p = j\omega$). D'autre part, M ne peut s'annuler pour les pôles de z_{12}, car ceux-ci sont nécessairement pôles de z_{11} et de z_{22}. Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème fondamental de Cauer sur les quadripôles de réactances (cf. annexe I). Par conséquent, $g_m(p)$ ne peut s'annuler dans le demi-plan de droite, ni sur la frontière ; c'est donc un polynôme de Hurwitz. Comme conséquence du même théorème, $f_m(p)$ est un polynôme pair ou impair de la variable p, réel pour p réel.

Le polynôme de Hurwitz $g_m(p)$ peut s'écrire, en séparant la partie paire G_m et la partie impaire U_m :

(1.11) $$g_m(p) = G_m(p) + U_m(p).$$

On en déduit immédiatement l'expression de z_{12} et de z_{22} :

(1.12) $$\begin{cases} z_{12} = f_m/U_m , & z_{22} = G_m/U_m \quad \text{si } f_m \text{ pair} \\ z_{12} = f_m/G_m , & z_{22} = U_m/G_m \quad \text{si } f_m \text{ est impair} \end{cases}$$

La réactance z_{22} est, comme il se doit, le quotient de la partie paire par la partie impaire d'un polynôme de Hurwitz (ou inversement). M, rapport de transfert des courants, ne dépend évidemment pas de la réactance z_{11} (impédance d'entrée en circuit ouvert). Tous les quadripôles réactifs qui ont le même rapport de transfert des courants M ne diffèrent donc que par la valeur de leur réactance z_{11}, ce qui est physiquement évident (la mise en série d'une réactance arbitraire ne modifiant pas le rapport M).

L'expression (1.2) de l'impédance effective w_{e1} montre de plus que, si M est donné, il existe une valeur privilégiée de z_{11}, que nous désignerons par $(z_{11})_{min}$, pour laquelle w_{e1} reste finie pour toute valeur de $j\omega$, y compris 0 et ∞. L'expression de $(z_{11})_{min}$ s'obtient immédiatement à partir de la décomposition de la matrice d'impédances : $(z_{11})_{min}$ possède les pôles communs à z_{12} et z_{22}, les résidus satisfaisant à la condition de couplage parfait (cf. Annexe I). On obtient ainsi le « quadripôle minimum » ayant un rapport de transfert M donné. Les quadripôles les plus généraux ayant le même rapport M s'obtiennent en plaçant, en série avec le quadripôle minimum, une réactance arbitraire. Ces résultats montrent clairement comment on peut réaliser un quadripôle de rapport de transfert de courants $M = \dfrac{g_m(p)}{f_m(p)}$ donné.

Si nous examinons maintenant le rapport $N = U_1/U_2$ toutes les considérations précédentes s'appliquent en parlant d'admittance au lieu d'impédance. On écrira :

(1.13) $$N = (1 + y_{22})/(-y_{12}) = g_n(p)/f_n(p)$$

où $g_n = G_n + U_n$ est un polynôme de Hurwitz et f_n un polynôme pair ou impair. Les formules (1.12) restent valables en remplaçant z par y et m par n. Il existe un quadripôle minimum de rapport N donné, d'admittance effective

$$w_e = (y_{11})_{min} \quad y_{12}^2/(1 + y_{22}) ,$$

et tous les quadripôles réactifs de même N s'obtiennent par mise en parallèle, à l'entrée du quadripôle minimum, d'une réactance arbitraire. Nous verrons plus loin par quels procédés on peut effectuer la synthèse de ces réseaux.

Considérons maintenant le cas le plus important : celui de l'exposant effectif de transfert $\Gamma = \log S = A + jB$. Le rapport $S = e^{\Gamma} = (M + N)/2$ est une fraction rationnelle de la variable $p = \sigma + j\omega$. Nous pourrons poser :

(1.14) $$S = g/f = (M + N)/2,$$

f étant un polynôme pair ou impair, produit des polynômes f_m et f_n introduits précédemment, et g un polynôme de Hurwitz. En effet, on peut écrire :

$$S = (M + N)/2 = M(1 + w_{e1})/2$$

M ne possède pas de zéro dans le demi-plan de droite, ni sur la frontière, d'après le paragraphe précédent. D'autre part, l'impédance effective d'entrée est une fonction positive réelle, dont la partie réelle ne peut prendre de valeur négative dans le demi-plan de droite, frontière comprise. g est donc bien un polynôme de Hurwitz. On pourra de même écrire :

(1.15) $$T = e^{\Gamma_r} = \frac{w_e + 1}{w_e - 1} = \frac{M + N}{N - M} = \frac{g}{h} ,$$

g étant le même polynôme de Hurwitz que précédemment, et h un polynôme quelconque. Le quadripôle réactif est entièrement caractérisé par les trois polynômes f, h, $g = G + U$.

Ces polynômes ne sont d'ailleurs pas indépendants. En effet, de (1.14) et (1.15), on tire les relations :

(1.16) $$M = (g - h)/f, \qquad N = (g + h)/f.$$

La relation de conservation de l'énergie $\mathcal{R}e\,(N\overline{M}) = 1$ s'écrit en tenant compte des équations (1.16) : [1]

(1.17) $$g(p)\,g(-p) = f(p)\,f(-p) + h(p)\,h(-p) = \pm f^2(p) + h(p)\,h(-p),$$

le signe + étant valable pour f pair, le signe — pour f impair. On déduit facilement de (1.16) et de (1.17) les relations fondamentales exprimant l'exposant effectif de transfert et l'exposant de réflexion en fonction de f, g, h :

(1.18) $$\left\{\begin{aligned} &S = g/f, \quad T = g/h, \quad \varphi = S/T = h/f, \quad w_{e1} = (g+h)/(g-h) = (S+\varphi)/(S-\varphi);\\ &S(p)\,S(-p) = g(p)\,g(-p)/f(p)\,f(-p) = 1 + \varphi(p)\,\varphi(-p);\\ &T(p)\,T(-p) = g(p)\,g(-p)/h(p)\,h(-p) = 1 + [\varphi(p)\,\varphi(-p)]^{-1};\\ &2A = \log[1 + |\varphi|^2], \qquad 2A_r = \log[1 + 1/|\varphi|^2]. \end{aligned}\right.$$

Ces formules servent de base à la spécification des filtres d'affaiblissement effectif donné. En effet, la donnée de A, donc de $\varphi = h/f$, entraîne la connaissance de g (formule 1.17) donc de w_{e1}. On est ramené au problème de la synthèse d'un quadripôle d'impédance effective donnée, problème classique qui peut se résoudre par diverses méthodes, dont la plus connue est celle d'O. Brune. Il va sans dire que la mise en œuvre de cette synthèse entraîne, dans les cas compliqués, de sérieuses difficultés d'ordre pratique.

2.3. **Matrices des quadripôles symétriques et antimétriques.**

Considérons tout d'abord la *matrice de chaîne* (normée) ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$) d'un quadripôle réactif quelconque. $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ sont des fractions rationnelles paires, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des fractions rationnelles impaires de $p = j\,\omega$, liées à la matrice (Z) par les relations :

(1.19) $$z_{11} = \mathcal{A}/\mathcal{C}, \qquad z_{12} = 1/\mathcal{C}, \qquad z_{22} = \mathcal{D}/\mathcal{C}; \qquad \text{dét}\ Z = \mathcal{B}/\mathcal{C} = w^2.$$

Les rapports de transfert effectifs S et T s'expriment facilement en fonction de la matrice de chaîne :

(1.20) et (1.21) $$S = \frac{1}{2}[\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D}] = g/f; \quad T = \frac{w_e + 1}{w_e - 1} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D}}{\mathcal{A} + \mathcal{B} - (\mathcal{C} + \mathcal{D})} = g/h, \quad \text{d'où :}$$

(1.22) $$\varphi = S/T = [\mathcal{A} + \mathcal{B} - (\mathcal{C} + \mathcal{D})]/2 = h/f.$$

De ces relations on déduit que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fraction rationnelle $N = S + \varphi = (g + h)/f$ et que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont la partie impaire et la partie paire de $M = S - \varphi = (g - h)/f$. De (1.19) on tire également :

(1.23) $$z_{11} = \frac{\text{Partie p. } [S + \varphi]}{\text{Partie imp. } [S - \varphi]}; \quad z_{12} = \frac{1}{\text{Partie imp. } [S - \varphi]}; \quad z_{22} = \frac{\text{Partie p. } [S - \varphi]}{\text{Partie imp. } [S - \varphi]}$$

Ces relations se simplifient notablement dans deux cas particuliers que nous utiliserons par la suite :

1er *cas : filtres symétriques.* — Ces filtres sont caractérisés par $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, $z_{11} = z_{22}$. D'après (1.22), $\varphi = [\mathcal{B} - \mathcal{C}]/2$ est une fonction impaire : $\varphi(-p) = -\varphi(p)$. Donc, si f est pair, h est impair et réciproquement.

En posant $g(p) = G(p) + U(p)$ avec G pair et U impair, les relations (1.23) fournissent immédiatement l'expression des matrices Z et Y. Il vient :

(1.24) $$Z = \frac{1}{U - h}\begin{Vmatrix} G & f \\ f & G \end{Vmatrix}, \qquad Y = Z^{-1} = \frac{1}{U + h}\begin{Vmatrix} G & -f \\ -f & G \end{Vmatrix} \text{ si } f \text{ pair } (h \text{ impair})$$

(1.25) $$Z = \frac{1}{G - h}\begin{Vmatrix} U & f \\ f & U \end{Vmatrix}, \qquad Y = Z^{-1} = \frac{1}{G + h}\begin{Vmatrix} U & -f \\ -f & U \end{Vmatrix} \text{ si } f \text{ impair } (h \text{ pair})$$

et la relation (1.17) devient :

(1.26) $$G^2 - U^2 = \pm (f^2 - h^2) \qquad (+ \text{ pour } f \text{ pair}, - \text{ pour } f \text{ impair}).$$

---

1) Pour $p = j\omega$, c'est-à-dire sur l'axe imaginaire, on a évidemment :

$$\overline{g(p)} = g(-j\omega) = g(-p).$$

Les formules (1.17) et (1.18) sont valables pour $p = j\omega$.

2e *cas* : *filtres antimétriques*. — Ces filtres ont une impédance caractéristique constante : $w = 1$ donc $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Par conséquent, $\varphi = [\mathcal{A} - \mathcal{D}]/2$ est une fonction paire : $\varphi(-p) = \varphi(p)$. f et h sont de même parité, donc pairs si on les suppose sans facteur commun. A partir de (1.23) on trouve :

$$\text{(1.27)} \qquad Z = \frac{1}{U}\begin{Vmatrix} G+h & f \\ f & G-h \end{Vmatrix}, \qquad Y = Z^{-1} = \frac{1}{U}\begin{Vmatrix} G-h & -f \\ -f & G+h \end{Vmatrix},$$

et (1.17) devient :

$$\text{(1.28)} \qquad G^2 - U^2 = f^2 + h^2 .$$

2.4. **Synthèse des quadripôles réactifs à partir des matrices (Z) et (Y).**

Il est aisé de réaliser la synthèse d'un filtre dont la matrice Z (ou Y) est connue. Un procédé absolument général dû à Cauer, dont l'intérêt théorique est considérable, mais dont l'intérêt pratique est restreint parce qu'il introduit des transformateurs parfaits, est basé sur la décomposition en éléments simples des matrices. L'annexe I donne quelques indications sur ce procédé, qui, dans le cas des filtres symétriques, se confond d'ailleurs avec la synthèse sous forme de treillis symétrique canonique (montages différentiels). Le développement en échelle dont l'intérêt pratique est évident, peut être réalisé de différentes façons. On peut partir de l'impédance effective $w_e = z_{11} - z_{12}^2/(1 + z_{22})$ et utiliser la méthode de Brune, ou diverses variantes dues à R. Leroy et J. Ville.

Un procédé plus simple consiste à développer en échelle l'une des impédances en circuit ouvert z_{11}, z_{22}, ou encore les deux simultanément, les deux développements devant se confondre pour l'élément médian. La synthèse est grandement facilitée lorsqu'on connaît les zéros du polynôme f (pôles d'affaiblissement effectif), ce qui sera toujours le cas dans la suite. Enfin, on peut décomposer en produits réalisables la matrice de chaîne (méthode de Piloty).

Nous donnerons dans les chapitres suivants plusieurs exemples de synthèse, avec quelques indications pratiques sur la manière d'effectuer le développement.

III. — AIGUILLAGES D'IMPÉDANCE CONSTANTE.

3.1. **Origine et définition.**

La mise en série, ou en parallèle, de deux ou plusieurs quadripôles réactifs ne peut s'effectuer sans précautions particulières, puisque les propriétés d'un quadripôle dépendent essentiellement de ses impédances de fermeture. Nous considérons pour commencer le cas simple de l'association d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut. Si ces deux filtres sont spécifiés indépendamment l'un de l'autre, il n'y a aucune raison pour que leur mise en parallèle (ou en série) s'effectue sans perturbation. On est donc naturellement conduit à spécifier, non plus deux quadripôles séparés, mais un hexapôle qui forme un tout et satisfasse d'emblée aux conditions de filtrage imposées à chacun des deux filtres (*fig.* 2). Supposons qu'un tel hexapôle soit réalisé. Dans la bande passante du filtre passe-bas Q_1, l'impé-

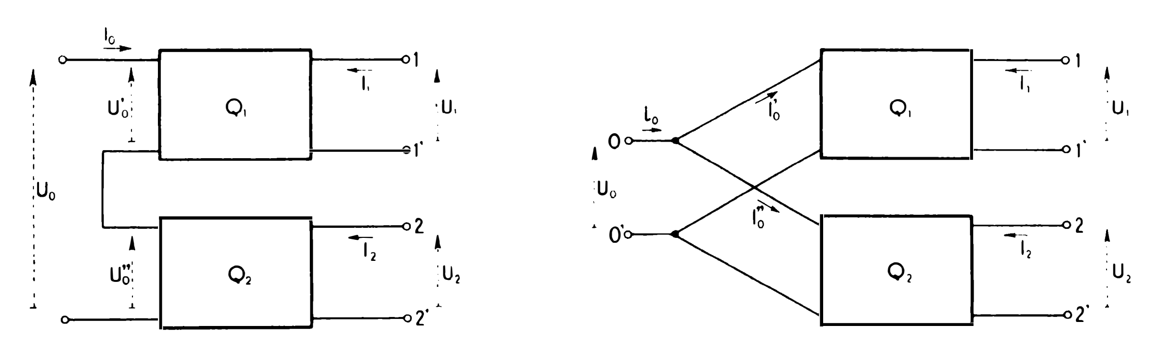


Fig. 2. — *Mise en série, en parallèle des paires de bornes d'entrée de deux quadripôles pour former un hexapôle.*

dance effective de ce filtre est pratiquement réelle et voisine de l'impédance de fermeture R. Par contre, l'impédance effective du filtre passe-haut Q_2 est très voisine d'une réactance, qui doit rester faible dans le cas d'une mise en série, élevée dans le cas d'une mise en parallèle. Les rôles des filtres Q_1, Q_2 sont inversés dans la bande passante du filtre Q_2.

Dans presque toute l'échelle des fréquences — une zone faible pouvant être réservée entre les frontières des deux filtres — l'impédance effective d'entrée reste donc voisine d'une constante R. On peut se demander si par extension il est possible d'obtenir, à toute fréquence, une impédance effective aux bornes communes, réelle, constante et égale à R. La réponse est affirmative, comme on le verra plus loin. Un aiguillage de ce type sera appelé, par abréviation, aiguillage d'impédance constante ou encore aiguillage strict. En réalité, seule l'impédance effective, mesurée des bornes communes 00,

est constante — à l'encontre de certains schémas en pont d'impédance constante à toutes les paires de bornes (cf. IV, V). Nous étudierons donc pour commencer les aiguillages d'impédance constante, puis les généralisations qui se présenteront tout naturellement et dont on verra plus loin l'intérêt pratique.

3.2. **Mise en série ou en parallèle de deux quadripôles.**

Considérons deux quadripôles réactifs (Q_1), (Q_2), définis par leurs matrices d'admittance (Y_1, Y_2) ou leurs matrices d'impédance (Z_1, Z_2). Dans une mise en parallèle, la matrice d'admittance de l'hexapole (00′, 11′, 22′) a pour expression $Y = Y_1 + Y_2$; dans une mise en série, la matrice d'impédance de l'hexapole est $Z = Z_1 + Z_2$. Ceci résulte clairement des relations $I_0 = I'_0 + I''_0$, $U'_0 = U''_0 = U_0$. Désignons par X une matrice qui sera soit d'admittance, soit d'impédance, suivant le problème posé : les deux cas peuvent être traités simultanément, car les expressions analytiques sont les mêmes. On peut écrire :

$$X_1 = \begin{Vmatrix} x'_{00} & x_{01} & 0 \\ x_{01} & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad X_2 = \begin{Vmatrix} x''_{0} & 0 & x_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{02} & 0 & x_{22} \end{Vmatrix}, \quad \text{d'où par addition :}$$

$$X = X_1 + X_2 = \begin{Vmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{01} & x_{11} & 0 \\ x_{02} & 0 & x_{22} \end{Vmatrix} \quad \text{avec} \quad x_{00} = x'_{00} + x''_{00}\,. \tag{2.1}$$

Par conséquent, tout hexapole constitué par la mise en parallèle (ou en série) de deux quadripôles est tel que $x_{12} = x_{21} \equiv 0$.

Inversement, soit un hexapole réactif, physiquement réalisable, dont la matrice Y (ou Z) est de la forme (2.1). x_{00}, x_{11}, x_{22} sont des réactances, x_{01}, x_{02}, des « réactances de transfert ». On démontre aisément qu'un tel hexapôle peut être réalisé au moyen de deux quadripôles disposés en parallèle (ou en série) à l'une des paires de bornes (cf. annexe I).

Donc : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un hexapôle (physiquement réalisable) soit réalisable par mise en parallèle (en série) de deux quadripôles est que le terme x_{12} (y_{12} ou z_{12}) soit identiquement nul.*

Définition. — Nous appellerons *quadripôles composants* de l'aiguillage les deux filtres disposés en parallèle et en série dans l'hexapôle.

Supposons que l'hexapôle formé de ses deux composants (par exemple placés en parallèle) ait une admittance effective constante à la paire de bornes communes 00′. Si cette admittance W_e est constante, l'admittance effective de chaque composant, pris isolément, est nécessairement finie dans toute l'échelle des fréquences. En effet, un pôle de l'admittance d'un des deux filtres composants ne peut s'éliminer dans l'addition des admittances effectives, puisque les résidus des pôles sont nécessairement positifs (théorème de Cauer, voir annexe I).

Inversement, donnons-nous un quadripôle réactif Q′ d'admittance effective finie à toute fréquence W'_e. Soit R le maximum de la partie réelle de cette admittance : $R = \text{Max}\,[\mathcal{R}e\,(W'_e)]$. On peut associer à Q′ un deuxième quadripôle Q″ d'admittance effective W''_e, finie à toute fréquence, telle que dans la mise en parallèle on ait :

$$W_e = W'_e + W''_e = R = C^{te}.$$

En effet, $R - W'_e$ est une fonction positive-réelle, restant finie à toute fréquence et s'annulant au moins une fois sur l'axe imaginaire. D'après un théorème classique (O. Brune), $W''_e = R - W'_e$ peut être réalisée comme admittance effective d'un quadripôle réactif terminé par une résistance ohmique unique. Le problème est donc résolu. En choisissant la résistance R comme unité, on aura, d'après la formule (1.9) :

$$\mathcal{R}e\,(W'_e) + \mathcal{R}e\,(W''_e) = \mathcal{R}e\,(W_e) = 1/|N'|^2 + 1/|N''|^2 = |U_1/U_0|^2 + |U_2/U_0|^2 = 1, \tag{2.2}$$

avec N′ = rapport de transfert des tensions du composant Q′ et N″ = rapport de transfert des tensions du composant Q″. Or, comme l'admittance W_e de l'hexapôle est constante, l'exposant effectif de transfert Γ_1 de l'hexapôle entre les bornes 00′, 11′ est identique à l'exposant de transfert des tensions N′ et il en est de même pour Γ_2 entre les bornes 00′, 22′.

$$\Gamma_1 = \log N', \qquad \Gamma_2 = \log N''. \tag{2.3}$$

On aura par conséquent, en appliquant la dernière des formules (1.18), et en tenant compte de (2.2) :

$$A_1 = A'_n = \log |N'| = \frac{1}{2} \log\,[1 + |\varphi|^2]\ ; \qquad A_2 = A''_n = \log |N''| = \frac{1}{2} \log\,[1 + |\varphi|^{-2}]. \tag{2.4}$$

Inversement, si les affaiblissements de tension A'_n et A''_n de deux composants en parallèle d'un hexapôle satisfont aux relations (2.4), φ étant une fraction rationnelle quelconque de p et si les deux composants ont une admittance d'entrée finie, l'hexapôle est d'impédance effective constante.

En effet, $\mathcal{R}e\,(w_e) = \mathcal{R}e\,(w_e') + \mathcal{R}e\,(w_e'') = \dfrac{1}{|N'|^2} + \dfrac{1}{|N''|^2} = 1$ est une fonction positive réelle sans pôle sur l'axe imaginaire et dont la partie réelle est constante sur la frontière. Donc, d'après le théorème de Liouville, w_e est une constante ($w_e \equiv 1$). En conclusion, tout aiguillage d'impédance constante (aiguillage strict) est caractérisé par une fonction $\varphi\,(p)$ dont le module est lié aux affaiblissements de tension (ou de courant) des quadripôles composants par les formules (2.4). Ces affaiblissements de tension sont d'ailleurs identiques aux affaiblissements composites (00′ 11′) et 00′ 22′) de l'hexapôle.

Le rapport $|\varphi|^2 = |N'/N''|^2 = e^{-2(A_2-A_1)} = |\tau_2/\tau_1|^2$ n'est rien d'autre que le rapport des puissances transmises des bornes 00′ aux bornes 11′ et 22′; aucune puissance n'est réfléchie aux bornes 00′, qui sont parfaitement adaptées quelle que soit la fréquence.

De façon générale, la formule (1.8) peut se généraliser pour un hexapôle quelconque formé de deux quadripôles composants, sous la forme suivante :

(2.5) $$e^{-2A_1} + e^{-2A_2} + e^{-2A_r} = 1\,,$$

A_r étant l'affaiblissement de réflexion aux bornes 00′.

Dans le cas d'un aiguillage strict, $A_r \equiv \infty$ à toute fréquence et le terme e^{-2A_r} disparaît. En se reportant aux formules (1.18), on voit immédiatement que Γ_1, Γ_2 vont jouer, pour l'aiguillage strict exactement le même rôle que Γ, Γ_r pour un quadripôle isolé.

3.3. **Matrices caractéristiques des aiguillages stricts.**

Nous nous bornerons désormais aux cas particulièrement simples où la fraction rationnelle φ, caractéristique de l'aiguillage, est une fonction paire ou impaire de la variable p. Ces cas ne sont d'ailleurs pas les plus généraux comme on peut le vérifier facilement. Nous poserons, comme au § 2.2 :

(2.6) $$\varphi = h/f\,,$$

la fonction φ définissant l'affaiblissement d'un filtre passe-bas par la relation (2.4). f devant donc être régulière pour $p = 0$, il en résulte que, dans la suite de notre exposé, f sera toujours un polynôme pair, h pouvant être un polynôme impair ou pair. En désignant par $g\,(p)$ un polynôme de Hurwitz, on écrira, d'après le § 2.2 et la remarque finale du § 3.2 :

(2.7) $$N' = S_1 = g/f\,, \qquad N'' = S_2 = g/h\,,$$

et la relation (2.2) montre que $g\,(p)$ est lié à f et h par la relation (1.17).

1er *cas : $\varphi\,(p)$ est impair (f pair, h impair).* — En posant : $g\,(p) = G + U$ (G pair, U impair) la relation (1.17) devient :

(2.8) $$G^2 - U^2 = f^2 - h^2\,.$$

Les relations (1.12) sont immédiatement applicables, en changeant les notations. On aura, d'après la première de ces relations, x_{01} et x_{11} étant substituées à z_{12}, z_{22} :

(2.9) $$x_{01} = f/U\,, \qquad x_{11} = G/U\,,$$

et la deuxième donne, en substituant x_{01}, x_{22} à z_{12}, z_{22} et en remplaçant f_m par h :

(2.10) $$x_{02} = h/G\,, \qquad x_{22} = U/G$$

x_{00} s'obtient en remarquant que l'admittance effective est constante, donc que

(2.11) $$w_e = x_{00} - \frac{x_{01}^2}{1 + x_{11}} - \frac{x_{02}^2}{1 + x_{22}} = 1\,, \qquad \text{et que :}$$

(2.12) $$x_{00} = 1 + \frac{x_{01}^2}{1 + x_{11}} + \frac{x_{02}^2}{1 + x_{22}} = 1 + \frac{f^2/U^2}{1 + G/U} + \frac{h^2/G^2}{1 + U/G} = \frac{f^2 + U^2}{GU} = \frac{h^2 + G^2}{GU}\,.$$

La matrice d'admittance (ou d'impédance) X est donc entièrement définie. On en déduit sans difficulté la matrice inverse X^{-1} (matrice d'impédance des deux quadripôles en parallèle, ou d'admittance des deux quadripôles en série).

(2.13) et (2.14) $$X = \begin{Vmatrix} (f^2 + U^2)/GU & f/U & h/G \\ f/U & G/U & 0 \\ h/G & 0 & U/G \end{Vmatrix} \qquad X^{-1} = \frac{GU}{G^2 - f^2} \begin{Vmatrix} 1 & -f/G & -h/U \\ -f/G & 1 & fh/GU \\ -h/U & fh/GU & 1 \end{Vmatrix}$$

2e *cas : $\varphi\,(p)$ est paire (f et h pairs).* La relation (1.17) devient :

(2.15) $$G^2 - U^2 = f^2 + h^2\,.$$

Les relations (1.12) s'écrivent :

(2.16) $$x_{01} = f/U,\quad x_{11} = G/U,\quad x_{02} = h/U,\quad x_{22} = G/U\,. \qquad \text{Enfin :}$$

(2.17) $$x_{00} = 1 + \frac{f^2/U^2}{1 + G/U} + \frac{h^2/U^2}{1 + G/U} = \frac{f^2 + h^2 + U\,(G + U)}{U\,(G + U)} = \frac{G}{U}\,.$$

D'où la matrice X et son inverse X^{-1} :

$$(2.18) \qquad X = \begin{Vmatrix} \frac{G}{U} & \frac{f}{U} & \frac{h}{U} \\ \frac{f}{U} & \frac{G}{U} & 0 \\ \frac{h}{U} & 0 & \frac{G}{U} \end{Vmatrix} \qquad (2.19) \qquad X^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{G}{U} & -\frac{f}{U} & -\frac{h}{U} \\ -\frac{f}{U} & \frac{G^2 - h^2}{GU} & \frac{fh}{GU} \\ -\frac{h}{U} & \frac{fh}{GU} & \frac{G^2 - f^2}{GU} \end{Vmatrix}$$

3.4. **Propriétés des aiguillages stricts.**

3.4.1. *Quadripôles mineurs.* — Si on supprime une ligne et une colonne de même rang k dans une matrice X (ou X^{-1}), on obtient la matrice du quadripôle constitué par mise en court-circuit ou circuit ouvert de la paire de bornes marquée $k - 1$ (suivant que X ou X^{-1} est matrice d'admittance ou d'impédance). Par analogie avec la théorie des déterminants, nous appellerons *quadripôle mineur* de l'aiguillage un tel quadripôle dont la matrice sera désignée par X_{k-1} ou X_{k-1}^{-1} (*fig.* 3 *et* 4).

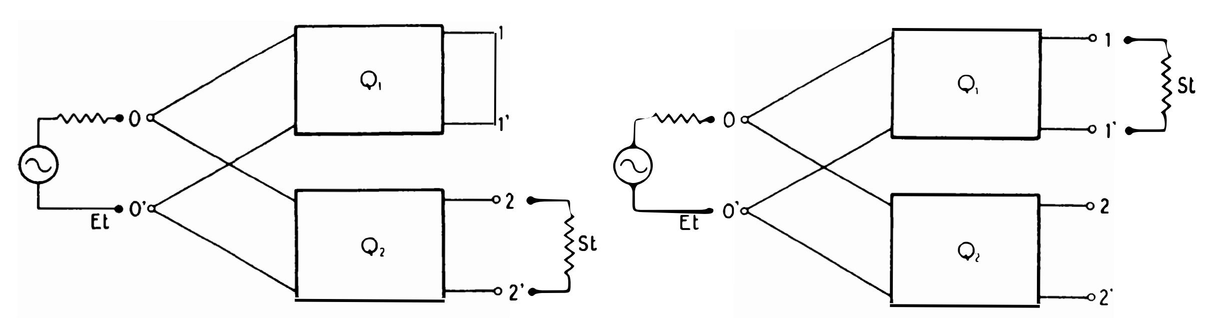


Fig. 3. — *Quadripôle mineur Y_1 d'un aiguillage.*

Fig. 4. — *Quadripôle mineur Y_2^{-1} d'un aiguillage.*

1er cas : φ *impair.* — On vérifie immédiatement que :

— les mineurs : X_0, X_1, X_2, sont antimétriques ; les mineurs : X_0^{-1}, X_1^{-1}, X_2^{-1} sont symétriques.

2e *cas* : φ *pair.*

— les mineurs : X_0, X_1, X_2, sont symétriques ; les mineurs : X_0^{-1}, X_1^{-1}, X_2^{-1}, sont antimétriques.

3.4.2. *Quadripôles complémentaires associés.* — *Définition* : deux quadripôles sont dits complémentaires si la fonction d'affaiblissement sur images $q = \coth \theta$ de l'un est égale (ou inverse) à l'une des impédances images de l'autre et vice versa. Ceci s'écrit :

$$(2.20) \qquad w_2 = [q_1]^{\pm 1}, \qquad w_1 = [q_2]^{\pm 1}.$$

Les aiguillages stricts peuvent être, de deux façons différentes, considérés comme constitués par la mise en parallèle (ou en série) de deux quadripôles complémentaires, avec soustraction, aux bornes communes 00′ d'une susceptance (ou réactance) déterminée. La nécessité de soustraire une susceptance pour obtenir la matrice de l'aiguillage montre du même coup que les *quadripôles composants ne sont pas complémentaires.*

1er *cas* : *la fonction φ est impaire.* — *a*) On peut associer à la matrice X deux quadripôles symétriques ayant respectivement pour matrices :

$$(2.21) \qquad X'_a = \begin{Vmatrix} G/U & f/U \\ f/U & G/U \end{Vmatrix} \qquad X''_a = \begin{Vmatrix} U/G & h/G \\ h/G & U/G \end{Vmatrix}$$

Ces deux quadripôles sont complémentaires. En effet, on a manifestement, pour X'_a :

$$(2.22) \qquad q_1 = \frac{x_{11}}{\sqrt{\text{dét } X'_a}} = \frac{G}{\sqrt{G^2 - f^2}}, \qquad w_1 = \sqrt{\text{dét } X'_a} = \frac{\sqrt{G^2 - f^2}}{U}, \qquad \text{et pour } X''_a :$$

$$(2.23) \qquad q_2 = \frac{x_{22}}{\sqrt{\text{dét } X''_a}} = \frac{U}{\sqrt{U^2 - h^2}}, \qquad w_2 = \frac{\sqrt{U^2 - h^2}}{G}$$

Or $G^2 - f^2 = U^2 - h^2$, donc $w_2 = q_1^{-1}$, $w_1 = q_2^{-1}$; de plus :

$$(2.24) \qquad X = X'_a + X''_a - \frac{G^2 - f^2}{GU} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Donc l'hexapôle s'obtient par mise en parallèle de X'_a et de X''_a et soustraction de la susceptance $(G^2 - f^2)/GU = 1/(x^{-1})_{00}$, c'est-à-dire de la susceptance vue des bornes 00′, lorsque 11′ et 22′ sont en circuit ouvert.

b) On peut associer à X deux quadripôles antimétriques qui ne sont rien d'autre que les mineurs X_2 et X_1 :

$$(2.25) \qquad X'_b = X_2 = \begin{Vmatrix} \dfrac{f^2 + U^2}{GU} & \dfrac{f}{U} \\ f/U & G/U \end{Vmatrix}, \qquad X''_b = X_1 = \begin{Vmatrix} \dfrac{f^2 + U^2}{GU} & \dfrac{h}{G} \\ h/G & U/G \end{Vmatrix}$$

Ces quadripôles sont complémentaires :

$$(2.26) \text{ et } (2.27) \qquad q_1 = \sqrt{U^2 + f^2}/U, \quad w_1 = \sqrt{U^2 + f^2}/G \ ; \qquad q_2 = \sqrt{U^2 + f^2}/G, \quad w_2 = \sqrt{U^2 + f^2}/U .$$

Donc $w_1 = q_2$, $w_2 = q_1$ et l'aiguillage résulte de la mise en parallèle des quadripôles X_2 et X_1 avec soustraction de la susceptance $(U^2 + f^2)/GU$, c'est-à-dire de la susceptance vue des bornes 00′, lorsque les bornes 11′, 22′ sont en court-circuit.

2e *cas : la fonction* φ *est paire.* — *a*) On peut associer à X deux quadripôles complémentaires; le mineur symétrique X_2 et le quadripôle antimétrique X″ :

$$(2.28) \qquad X_2 = \begin{Vmatrix} \dfrac{G}{U} & \dfrac{f}{U} \\ f/U & G/U \end{Vmatrix}, \qquad X'' = \begin{Vmatrix} \dfrac{U^2 + h^2}{UG} & \dfrac{h}{U} \\ h/U & G/U \end{Vmatrix}$$

On a :

$$(2.29) \qquad \text{pour } X_2 : \qquad q_1 = G/\sqrt{G^2 - f^2} \qquad w_1 = \sqrt{G^2 - f^2}/U$$

$$(2.30) \qquad \text{pour } X'' : \qquad q_2 = \sqrt{U^2 + h^2}/U \qquad w_2 = \sqrt{U^2 + h^2}/U$$

Or : $G^2 - f^2 = U^2 + h^2$, donc $w_1 = q_2$, $w_2 = q_1^{-1}$ et l'aiguillage résulte de la mise en parallèle de X_2 et de X″, avec soustraction de la susceptance $(U^2 + h^2)/UG$, inverse de la susceptance vue des bornes 22′, les bornes 00′ et 11′ étant en circuit ouvert.

b) On peut associer à X les deux quadripôles complémentaires constitués par le mineur X_1 et le quadripôle X′ :

$$(2.31) \qquad X' = \begin{Vmatrix} \dfrac{f^2 + U^2}{GU} & \dfrac{f}{U} \\ f/U & G/U \end{Vmatrix} \qquad X_1 = \begin{Vmatrix} \dfrac{G}{U} & \dfrac{h}{U} \\ h/U & G/U \end{Vmatrix} ; \qquad \text{on a :}$$

$$(2.32) \qquad q_1 = G/\sqrt{G^2 - h^2}, \qquad w_1 = \sqrt{G^2 - h^2}/U \ ;$$

$$(2.33) \qquad q_2 = \sqrt{U^2 + f^2}/U, \qquad w_2 = \sqrt{U^2 + f^2}/G ; \qquad q_1 = w_2^{-1}, \qquad q_2 = w_1 .$$

L'aiguillage résulte de la mise en parallèle de X′ et de X_1, avec soustraction de la susceptance $(U^2 + f^2)/GU$, inverse de la susceptance vue des bornes 11′ de l'aiguillage, les bornes 00′ et 22′ étant en circuit ouvert. Nous verrons au paragraphe suivant l'intérêt des quadripôles complémentaires associés, qui serviront de base à la spécification des aiguillages.

3.5. **Représentation des matrices de l'aiguillage à l'aide des fonctions** (q).

Dans le § 3.3, les matrices X, X^{-1} de l'hexapôle ont été exprimées en fonction des polynômes *f*, *g*, *h*, associés à la fonction $\varphi = h/f$ (fonction qui définit entièrement l'aiguillage à partir de ses propriétés effectives (affaiblissement composite ou, mieux, effectif). Il est possible de réaliser des aiguillages dont l'affaiblissement effectif est une fonction donnée de la fréquence; par exemple si on choisit pour la fraction rationnelle φ des paramètres convenables, on peut réaliser la meilleure approximation de l'affaiblissement, au sens de Tchebycheff. C'est la voie suivie par Cauer dans son ouvrage. Toutefois, si la synthèse des aiguillages à partir de la fonction φ permet dans certains cas de réaliser une économie notable d'éléments, cette méthode présente plusieurs inconvénients. En premier lieu, dans un problème pratique, l'affaiblissement imposé n'est pas forcément uniforme en fonction de la fréquence; dans de nombreux cas au contraire, l'affaiblissement doit être plus important à certaines fréquences qu'à d'autres, de sorte que la méthode de meilleure approximation perd beaucoup de son intérêt. Par ailleurs, la synthèse d'aiguillage, à partir de la fonction φ, nécessite des calculs assez laborieux (détermination des polynômes *f*, *g*, *h*).

Nous nous contenterons ici de spécifier les aiguillages *à partir des fonctions d'affaiblissement sur images* q_1, q_2 *des quadripôles associés*. En choisissant pour q_1, q_2, des fonctions classiques ayant un point de branchement commun unique, la théorie apparaît comme une généralisation naturelle de la théorie des filtres classiques au sens de Zobel. De tels aiguillages ne sont pas nécessairement les plus économiques pour un problème donné, mais ils permettent une détermination immédiate de la matrice d'impédances ou d'admittances de l'hexapôle, un choix arbitraire des fréquences d'affaiblissement infini, et surtout, comme nous le verrons au chapitre suivant, une généralisation intéressante de la notion d'aiguillage strict (aiguillages à deux coupures distinctes). Du point de vue historique, ces aiguillages ont été conçus avant les aiguillages *de synthèse*, en particulier par Brandt [5] et Cauer [7].

Examinons maintenant, en introduisant les fonctions q_1 et q_2 les quatre cas types du § 3.4.

1er *cas : la fonction* $\varphi(p)$ *est impaire.* — *a) Les deux quadripôles complémentaires associés sont symétriques.*

Désignons par q_1, q_2 leurs fonctions d'affaiblissement sur images : *si nous choisissons pour* q_1, q_2 *des fonctions images classiques, c'est-à-dire ayant un point de branchement unique, les fonctions* q_1, q_2 *seront deux fonctions conjuguées de degré pair.* D'après (2.13), (2.22) et (2.23) :

(2.34) $G/U = w_1 q_1 = 1/w_2 q_2 = q_1/q_2$;

(2.35) $\begin{cases} f/U = w_1\sqrt{q_1^2-1} = \sqrt{q_1^2-1}/q_2, \\ h/G = w_2\sqrt{q_2^2-1} = \sqrt{q_2^2-1}/q_1 ; \end{cases}$

(2.36) $(f^2+U^2)/GU = (q_1^2+q_2^2-1)/q_1 q_2$;

d'où l'on déduit les matrices (2.37) :

(2.37)
$$X = \left\| \begin{matrix} \dfrac{q_1^2+q_2^2-1}{q_1 q_2} & \dfrac{\sqrt{q_1^2-1}}{q_2} & \dfrac{\sqrt{q_2^2-1}}{q_1} \\ \dfrac{\sqrt{q_1^2-1}}{q_2} & \dfrac{q_1}{q_2} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{q_2^2-1}}{q_1} & 0 & \dfrac{q_2}{q_1} \end{matrix} \right\|$$

(2.37)
$$X^{-1} = \left\| \begin{matrix} q_1 q_2 & -q_2\sqrt{q_1^2-1} & -q_1\sqrt{q_2^2-1} \\ -q_2\sqrt{q_1^2-1} & q_1 q_2 & \sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)} \\ -q_1\sqrt{q_2^2-1} & \sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)} & q_1 q_2 \end{matrix} \right\|$$

Ces formules sont valables pour q_1, q_2 *complémentaires de degré pair.*

b) Les deux quadripôles complémentaires associés sont antimétriques. Pour des fonctions q_1, q_2 complémentaires classiques, q_1, q_2 seront toutes deux de degré impair. D'après (2.13), (2.26), (2.27) :

(2.38) $\begin{cases} f/U = \sqrt{q_1^2-1}, \\ G/U = q_1/w_1 = q_1/q_2 ; \end{cases}$

(2.39) $\begin{cases} h/G = \sqrt{q_2^2-1}, \\ (f^2+U^2)/GU = q_1 q_2 ; \end{cases}$

d'où l'on déduit les matrices (2.40) :

(2.40)
$$X = \left\| \begin{matrix} q_1 q_2 & \sqrt{q_1^2-1} & \sqrt{q_2^2-1} \\ \sqrt{q_1^2-1} & q_1/q_2 & 0 \\ \sqrt{q_2^2-1} & 0 & q_2/q_1 \end{matrix} \right\|$$

(2.40)
$$X^{-1} = \frac{1}{q_1^2+q_2^2-q_1^2 q_2^2} \left\| \begin{matrix} q_1 q_2 & -q_2^2\sqrt{q_1^2-1} & -q_1^2\sqrt{q_2^2-1} \\ -q_2^2\sqrt{q_1^2-1} & q_1 q_2 & q_1 q_2\sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)} \\ -q_1^2\sqrt{q_2^2-1} & q_1 q_2\sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)} & q_1 q_2 \end{matrix} \right\|$$

Ces formules sont valables pour q_1, q_2 *de degré impair.*

2e *cas : la fonction* $\varphi(p)$ *est paire.* — *a) Le quadripôle* Q_1 *est symétrique* (q_1 *de degré pair*), *le quadripôle* Q_2 *antimétrique* (q_2 *de degré impair*).

En combinant les formules (2.18), (2.29), (2.30) il vient :

(2.41) et (2.42) $f/U = w_1\sqrt{q_1^2-1} = q_2\sqrt{q_1^2-1}$; $G/U = w_1 q_1 = q_1 q_2$, $h/U = \sqrt{q_2^2-1}$, donc :

(2.43)
$$X = \left\| \begin{matrix} q_1 q_2 & q_2\sqrt{q_1^2-1} & \sqrt{q_2^2-1} \\ q_2\sqrt{q_1^2-1} & q_1 q_2 & 0 \\ \sqrt{q_2^2-1} & 0 & q_1 q_2 \end{matrix} \right\|, \quad X^{-1} = \left\| \begin{matrix} q_1 q_2 & -q_2\sqrt{q_1^2-1} & -\sqrt{q_2^2-1} \\ -q_2\sqrt{q_1^2-1} & \dfrac{q_1^1 q_2^2+1-q_2^2}{q_1 q_2} & \dfrac{\sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)}}{q_1} \\ -\sqrt{q_2^2-1} & \dfrac{\sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)}}{q_1} & \dfrac{q_2}{q_1} \end{matrix} \right\|$$

b) Le quadripôle Q_1 *est antimétrique* (q_1 *impair*), *le quadripôle* Q_2 *symétrique* (q_2 *pair*).

Ce cas est identique au précédent, il suffit d'échanger q_1 et q_2. Donc :

(2.44)
$$X = \left\| \begin{matrix} q_1 q_2 & \sqrt{q_1^2-1} & q_1\sqrt{q_2^2-1} \\ \sqrt{q_1^2-1} & q_1 q_2 & 0 \\ q_1\sqrt{q_2^2-1} & 0 & q_1 q_2 \end{matrix} \right\|, \quad X^{-1} = \left\| \begin{matrix} q_1 q_2 & \sqrt{q_1^2-1} & q_1\sqrt{q_2^2-1} \\ -\sqrt{q_1^2-1} & \dfrac{q_1}{q_2} & \dfrac{\sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)}}{q_2} \\ -q_1\sqrt{q_2^2-1} & \dfrac{\sqrt{(q_1^2-1)(q_2^2-1)}}{q_2} & \dfrac{q_1^2 q_2^2+1-q_1^2}{q_1 q_2} \end{matrix} \right\|$$

Les formules donnant les matrices X, X^{-1} en fonction de q_1, q_2 sont une généralisation évidente des formules (1.1) valables pour un quadripôle. Il est donc possible de rattacher un aiguillage strict à deux fonctions d'affaiblissement sur images qui pourront être par exemple des fonctions classiques, ayant un seul point de branchement (fréquence de coupure commune aux deux filtres). Nous allons examiner maintenant les relations unissant l'affaiblissement effectif aux fonctions q_1 et q_2.

3.6. Affaiblissement effectif de l'aiguillage et des mineurs associés.

Les fonctions q_1, q_2 qui définissent un aiguillage à l'aide des formules précédentes sont des fonctions d'affaiblissement $q = \coth \theta$ des filtres complémentaires associés :

$$\begin{cases} q_1 \text{ est la fonction d'affaiblissement d'un passe-bas, } q_1 \simeq 1 \text{ pour } \Omega > 1\,; \\ q_2 \text{ est la fonction d'affaiblissement d'un passe-haut, } q_2 \simeq 1 \text{ pour } \Omega < 1. \end{cases}$$

On sait que l'aiguillage peut être considéré comme formé de ces deux filtres, *avec soustraction d'une susceptance (réactance) déterminée aux bornes communes*. On peut donc prévoir que q_1 caractérisera assez bien l'affaiblissement du passe-bas composant et q_2 l'affaiblissement du passe-haut composant. Mais il est nécessaire de connaître exactement l'affaiblissement effectif de ces deux filtres composants dans l'aiguillage lui-même. Il est très facile de déterminer la fonction $\varphi = h/f$ (formule 2.6) à l'aide des relations (2.34) à (2.42). (Rappelons que l'affaiblissement effectif du passe-bas dans l'aiguillage est la moitié de $\log\,[1 + |\varphi|^2]$, celui du passe-haut la moitié de $\log\,[1 + |\varphi|^{-2}]$.

Reprenons successivement les quatre cas types :

Cas 1.*a*. *φ impair, q_1 q_2 de degré pair.* — On aura :

$$\varphi = \frac{h}{f} = \frac{h}{G}\cdot\frac{G}{U}\cdot\frac{U}{f} = \frac{\sqrt{q_2^2-1}}{q_1}\cdot\frac{q_1}{q_2}\cdot\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2-1}} = \sqrt{\frac{q_2^2-1}{q_1^2-1}} \tag{2.45}$$

φ caractérise l'affaiblissement effectif d'un quadripôle symétrique ayant une fonction d'affaiblissement-image q_1 et une impédance-image w telle que :

$$w - 1/w = 2\sqrt{q_2^2-1} \quad \text{[cf. formule (1.5)]}\,. \tag{2.46}$$

q_1, q_2 étant des fonctions complémentaires, $q_2 \simeq 1$ dans la bande passante du passe-bas, donc $w \simeq 1$. Les conditions d'affaiblissement sont donc satisfaites.

On peut d'ailleurs aussi bien évaluer l'exposant effectif de transfert Γ_1 qui est identique à l'exposant de transfert de courant (ou de tension) [§ 3.2]. D'après (1.3) et (2.37) on a :

$$e^{\Gamma_1} = \frac{1 + x_{11}}{x_{10}} = \frac{q_2 + q_1}{\sqrt{q_1^2-1}}\,, \qquad e^{\Gamma_2} = \frac{1 + x_{22}}{x_{20}} = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{q_2^2-1}}\,. \tag{2.47}$$

L'exposant Γ_1 est identique à l'exposant de transfert de tension (ou de courant) d'un filtre d'impédance-image q_2 et d'affaiblissement image q_1. Ceci n'est pas surprenant puisque l'extraction d'une susceptance (réactance) aux bornes communes ne modifie pas l'exposant de transfert de tension (courant). Les pôles d'affaiblissement de Γ_1 sont :

les fréquences annulant le dénominateur ($q_1 = 1$),

les fréquences rendant q_2 infini (pôles de q_2).

Les pôles d'affaiblissement de Γ_2 sont :

— les fréquences telles que $q_2 = 1$,

— les pôles de q_1.

Cas 1.*b*. *φ impair, q_1, q_2 de degré impair.* — On aura de même :

$$\varphi = \frac{h}{f} = \frac{h}{G}\cdot\frac{G}{U}\cdot\frac{U}{f} = \sqrt{q_2^2-1}\,\frac{q_1}{q_2}\,\frac{1}{\sqrt{q_1^2-1}} = \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2-1}}\,\frac{\sqrt{q_2^2-1}}{q_2} \tag{2.48}$$

φ caractérise l'affaiblissement effectif du quadripôle antimétrique d'affaiblissement sur images q_1 et d'impédance image w telle que $1/2\,(w - 1/w) = \sqrt{q_2^2-1}/q_2$ ($w \simeq 1$ pour $q_2 \simeq 1$, bande passante du passe-bas). On a par ailleurs :

$$e^{\Gamma_1} = \frac{1 + x_{11}}{x_{10}} = \frac{1 + q_1/q_2}{\sqrt{q_1^2-1}}\,, \qquad e^{\Gamma_2} = \frac{1 + x_{22}}{x_{20}} = \frac{1 + q_2/q_1}{\sqrt{q_2^2-1}} \tag{2.49}$$

Γ_1 n'est rien d'autre que l'exposant de courant (tension) du filtre antimétrique d'impédance image q_2^{-1}, d'affaiblissement sur images q_1. Les pôles d'affaiblissement de Γ_1 s'obtiennent pour $q_1 = 1$ et $q_2 = 0$, comme ceux de Γ_2 pour $q_2 = 1$ et $q_1 = 0$.

Cas 2.*a*. *φ pair, q_1 de degré pair, q_2 de degré impair.* — On aura :

$$\varphi = \frac{h}{f} = \frac{h}{U}\cdot\frac{U}{f} = \frac{\sqrt{q_2^2-1}}{q_2}\,\frac{1}{\sqrt{q_1^2-1}} \tag{2.50}$$

φ caractérise l'affaiblissement effectif du filtre symétrique de fonction d'affaiblissement q_1 et d'impédance w : $1/2\ (w - 1/w) = \sqrt{q_2^2 - 1}/q_2$, $w \simeq 1$. pour $q_2 \simeq 1$. De plus :

$$e^{\Gamma_1} = (1 + q_1 q_2)/q_2\sqrt{q_1^2 - 1}, \qquad e^{\Gamma_2} = 1 + q_1 q_2/\sqrt{q_2^2 - 1}\ . \tag{2.51}$$

Les pôles d'affaiblissement de Γ_1 s'obtiennent pour $q_1 = 1$ et pour $q_2 = 0$, ceux de Γ_2 pour $q_2 = 1$ et $q_1 = \infty$.

Cas 2.*b*. Le cas 2.*b* est identique, il suffit de permuter les indices 1 et 2.

Il est facile de vérifier que les mineurs satisfont eux aussi aux conditions de filtrage. Si nous prenons par exemple le cas 1.*a* : (φ impair, q_1, q_2 de degré pair) le mineur X_2 est un quadripôle antimétrique, défini par :

$$W = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 1}/q_1 \simeq 1, \text{ si } q_2 \simeq 1 \qquad \text{et} \qquad Q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 1}/q_2 \sim q_1 \text{ si } q_2 \simeq 1\ .$$

Dans ce même cas, le mineur X_2^{-1} est le quadripôle symétrique d'impédance-image q_2 et d'affaiblissement q_1.

Dans le cas 2.*a*, le mineur X_1 est le quadripôle symétrique défini par :

$$W = \sqrt{(q_1^2 - 1)\ q_2^2 + 1} \simeq 1, \text{ si } q_1 \simeq 1 \qquad \text{et} \qquad Q = q_1 q_2/\sqrt{(q_1^2 - 1)\ q_2^2 + 1} \simeq q_2 \text{ si } q_1 \simeq 1\ ;$$

et le mineur X_1^{-1} est l'antimétrique d'impédance q_1, d'affaiblissement q_2, etc.

3.7. Affaiblissement de réflexion des aiguillages stricts.

Il est intéressant de connaître l'adaptation d'un aiguillage strict, aux bornes non communes (11′, 22′). Le moyen le plus commode d'arriver au résultat est de déterminer la matrice de répartition de l'hexapôle. Le calcul est reproduit dans l'annexe II. Le résultat général est extrêmement simple : en appelant Γ_1, Γ_2 les exposants de transfert effectifs des quadripôles composants, la matrice de répartition prend la forme :

$$\begin{Vmatrix} 0 & e^{-\Gamma_1} & e^{-\Gamma_2} \\ e^{-\Gamma_1} & \mp\ e^{-2\Gamma_2} & \mp\ e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} \\ e^{-\Gamma_2} & \mp\ e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} & \mp\ e^{-2\Gamma_1} \end{Vmatrix} \tag{2.52}$$

Le signe des coefficients dépendant de la parité de φ et de la structure (mise en série ou mise en parallèle).

On tire de (2.52) les deux conclusions suivantes :

1er *résultat.* — *Les trois paires de bornes de l'hexapôle étant bouclées sur la résistance caractéristique* R, *l'exposant effectif de transfert entre les bornes* 11′ *et* 22′ *est la somme des exposants effectifs de transfert,* Γ_1 *et* Γ_2 *des quadripôles composants.*

2e *résultat.* — *L'exposant de réflexion aux bornes* (11′) *est le double de l'exposant effectif de transfert* Γ_2 *du quadripôle* 2; *l'exposant de réflexion aux bornes* (22′) *est le double de l'exposant effectif de transfert* Γ_1 *du quadripôle* 1.

En particulier dès que l'affaiblissement des filtres de l'aiguillage est élevé, l'adaptation aux bornes non communes devient excellente. Supposons par exemple que le filtre passe-haut assure, dans sa bande affaiblie, un affaiblissement de 3 N ; alors le filtre passe-bas possède, dans sa bande passante, un affaiblissement de réflexion au moins égal à 6 N, d'où un coefficient de réflexion inférieur à 2,5 ‰.

La relation (2.52) donne d'ailleurs l'expression des impédances effectives w_{e1} et w_{e2} vues des paires de bornes (11′) et (22′) :

$$[w_{e1}]^{\pm 1} = \text{th}\ \Gamma_2 \quad ; \qquad [w_{e2}]^{\pm 1} = \text{th}\ \Gamma_1\ . \tag{2.53}$$

La matrice de répartition permet également d'établir, par un calcul élémentaire, les propriétés d'un aiguillage strict qui serait terminé, aux bornes (11′) et (22′), sur les impédances effectives w_{e1}, w_{e2} et non pas sur une résistance pure. L'annexe II donne quelques éclaircissements sur ce point.

3.8. Synthèse des aiguillages stricts, exemples élémentaires.

Pour illustrer la théorie, considérons l'aiguillage strict du plus faible degré, constitué par une demi-cellule de filtre passe-bas et une demi-cellule de filtre passe-haut. L'aiguillage sera de classe (0,5 ; 0,5)[2], la cellule complète de filtre étant prise pour unité. On choisira par conséquent, en désignant par P la grandeur $j\Omega = j\omega/\omega_0$:

$$q_1 = \sqrt{P^2 + 1}/P \quad ; \qquad q_2 = \sqrt{P^2 + 1} \qquad (q_1 \text{ et } q_2 \text{ sont des fonctions de degré 1}). \tag{2.54}$$

Ce cas entre dans la catégorie (1 *b*) avec φ impair.

2) La classe d'un filtre est la moitié du degré de la fonction q qui le caractérise. La classe de l'aiguillage est la somme des classes des deux filtres complémentaires associés.

Supposons qu'on veuille réaliser une mise en parallèle; dans ce cas la matrice d'admittance a pour expression, d'après les formules (2.40) :

$$(2.55)\qquad Y = \begin{Vmatrix} P + \frac{1}{P} & \frac{1}{P} & P \\ 1/P & 1/P & 0 \\ P & 0 & P \end{Vmatrix}$$

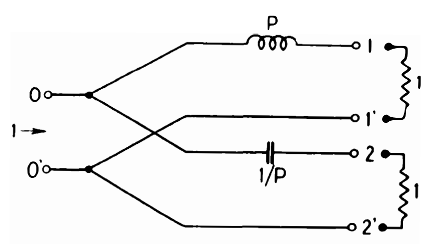


Fig. 5. — *Aiguillage strict* (0,5 ; 0,5).

La synthèse de cet aiguillage représenté sur la *fig.* 5 est immédiate, d'après la valeur des admittances en court-circuit $Y_{11} = 1/P$, $Y_{22} = P$. On trouve sans difficulté les polynômes caractéristiques de l'aiguillage (cf. formules 2.13) :

$$g = G + U = 1 + P, \quad f \equiv 1, \quad h = P.$$

De même la fonction φ, les affaiblissements A_1, A_2 s'écrivent :

$$\varphi = \frac{h}{f} = \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{q_2^2 - 1}}{q_2} = P, \qquad A_1 = \frac{1}{2}\log\,[1 + \Omega^2], \qquad A_2 = \frac{1}{2}\log\,[1 + \Omega^{-2}]. \quad \text{Enfin :}$$

$$e^{\Gamma_1} = (1 + x_{11})/x_{10} = P + 1\,, \qquad e^{\Gamma_2} = (1 + x_{22})/x_{20} = (1 + P)/P.$$

Deuxième exemple. — Considérons l'aiguillage formé par la mise en série d'un passe-bas associé à une fonction q_1 de degré 2 (une « cellule » complète) et d'un passe-haut associé à une fonction q_2 de degré 1 (une « demi-cellule »).

Si la fréquence d'affaiblissement infini du passe-bas est $\Omega_\infty = 1/\sqrt{1 - m^2}$ conformément aux notations usuelles, on aura :

$$q_1 = \frac{1 + (1 + m^2)\,P^2}{2\,m\,P\sqrt{P^2 + 1}} \quad \text{donc} \quad \sqrt{q_1^2 - 1} = \frac{(1 - m^2)\,P^2 + 1}{2\,m\,P\sqrt{P^2 + 1}}\,; \qquad q_2 = \sqrt{P^2 + 1}, \quad \sqrt{q_2^2 - 1} = P.$$

Cet exemple correspond au cas 2.*a*. La matrice d'impédance s'obtient au moyen des formules (2.43) :

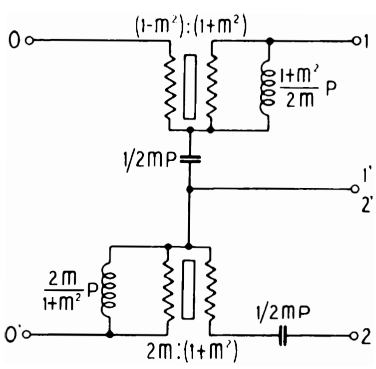
$$Z = \begin{Vmatrix} \frac{1 + m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} & \frac{1 - m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} & P \\ \frac{1 - m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} & \frac{1 + m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} & 0 \\ P & 0 & \frac{1 + m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} \end{Vmatrix}$$

Comme premier mode de réalisation, on peut utiliser la structure de Cauer basée sur la décomposition en éléments simples de la matrice d'impédances. En effet, sachant que les résidus des pôles satisfont à la condition de « couplage serré », il est clair que les matrices d'impédance du passe-bas et du passe-haut constituants sont respectivement :

$$\begin{Vmatrix} \frac{(1 - m^2)^2}{2\,m\,(1 + m^2)}P + \frac{1}{2\,m\,P} & \frac{1 - m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} \\ \frac{1 - m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} & \frac{1 + m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \frac{2\,m}{1 + m^2}P & P \\ P & \frac{1 + m^2}{2m}P + \frac{1}{2\,m\,P} \end{Vmatrix}$$

La somme de ces deux matrices donne bien la matrice Z de l'hexapôle indiqué ci-dessus. D'après les résultats de l'annexe I, les deux quadripôles sont réalisables d'après le schéma de la *fig.* 6 qui représente l'aiguillage complet. La fonction φ, caractéristique de l'affaiblissement effectif de l'aiguillage, a pour expression d'après (2.50) :

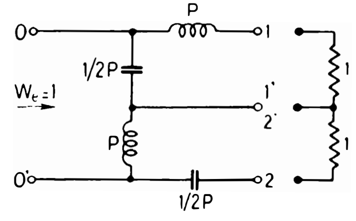
$$\varphi = 2\,m\,P^2/\,[1 + (1 - m^2)\,P^2]\,.$$



Aiguillage strict de classe 1,5.

Fig. 6. — *Mise en série.*

Le développement en échelle d'un aiguillage de ce type n'est pas possible dans le cas général (éléments négatifs). Il est possible seulement si $m = 1$ (affaiblissement effectif infini à la fréquence infinie). Dans ce cas on obtient le schéma de la *fig.* 7 qui est simplement la dégénérescence du schéma de la *fig.* 6 pour $m = 1$.



Aiguillage strict de classe 1,5.

Fig. 7. — *Cas où m = 1.*

IV. — AIGUILLAGES PASSE-BAS, PASSE-HAUT, A DEUX COUPURES DISTINCTES.

4.1. Critique des aiguillages d'impédance constante.

Les aiguillages d'impédance constante, dont la théorie a été établie au chapitre précédent, permettent de réaliser de façon parfaite la mise en parallèle ou en série d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut. En effet, les conditions d'affaiblissement sont satisfaites et, par surcroit, l'association des deux filtres composants assure une impédance rigoureusement constante aux bornes communes, les défauts d'adaptation des deux filtres individuels se compensant exactement. En contrepartie, ils ne sont pas très économiques en ce sens qu'ils nécessitent, pour obtenir un affaiblissement donné, plus d'éléments qu'il ne serait strictement nécessaire si les deux filtres composants étaient séparés. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque le nombre d'éléments d'un filtre dépend non seulement de l'affaiblissement, mais aussi de la régularité d'impédance exigée. Un autre inconvénient assez grave des aiguillages stricts est le suivant :

A la fréquence de coupure commune, l'affaiblissement effectif des deux filtres composants est égal à 0,35 N.

En effet, la relation (2.5) (avec $A_r = \infty$ puisque l'impédance aux bornes communes est rigoureusement constante) s'écrit si $A_1 = A_2 = A$:

(3.1) $$e^{-2A_1} + e^{-2A_2} = 2\,e^{-2A} = 1 \,, \qquad \text{d'où} \qquad A = 0{,}35\ \text{N}\,.$$

Or, dans de nombreux problèmes, on désire obtenir un affaiblissement beaucoup plus important dans « l'interbande », c'est-à-dire dans la zone de fréquences comprise entre les bandes transmises pratiquement sans distorsion par les filtres composants.

La relation (2.5) sous sa forme générale montre *qu'un tel résultat ne peut être obtenu qu'au détriment de l'adaptation dans l'interbande.*

En effet, à la fréquence où les deux composants ont même affaiblissement A, on a :

(3.2) $$2\,e^{-2A} + e^{-2A_r} = 1\,.$$

Si on désire par exemple $A = 0{,}7$ N, il vient $A_r = 0{,}35$ N ce qui correspond à un coefficient de réflexion de 70,7 %. Un affaiblissement important des deux filtres dans l'interbande ne peut donc être obtenu que par une désadaptation quasi-totale de l'aiguillage dans la zone considérée.

On conçoit facilement que si les filtres composants ont des fréquences de coupures décalées, et non plus confondues, l'affaiblissement dans l'interbande peut être notablement augmenté. Nous allons montrer qu'il est possible de construire des aiguillages, associant convenablement deux filtres dont les coupures sont distinctes.

4.2. Aiguillages à coupures distinctes.

Considérons un filtre passe-bas caractérisé par une fonction d'affaiblissement sur images q_1 dont la fréquence de coupure est désignée par ω_{-1} et un filtre passe-haut de fonction d'affaiblissement q_2 avec une coupure égale à ω_1 ($\omega_1 > \omega_{-1}$). En choisissant $\omega_0 = \sqrt{\omega_{-1}\omega_1}$ comme fréquence de référence, et en posant $m_0 = \sqrt{\omega_1/\omega_{-1}} = \omega_1/\omega_0 = \omega_0/\omega_{-1}$ on voit que q_1 contient le facteur irrationnel $\sqrt{P^2 + m_0^{-2}}$ et q_2 le facteur $\sqrt{P^2 + m_0^2}$ ($P = j\,\omega/\omega_0 = j\,\Omega$).

Si nous reprenons les matrices d'impédance (ou d'admittance) du § 3.5, on voit que les facteurs irrationnels ne s'éliminent pas si q_1 et q_2 ont des coupures distinctes.

Pour faire disparaître les facteurs irrationnels et obtenir une matrice de réactances, il est nécessaire de multiplier tous les termes par une fonction q_0 ayant les propriétés suivantes :

1° q_0 possède deux facteurs irrationnels $\sqrt{P^2 + m_0^{-2}}$, $\sqrt{P^2 + m_0^2}$;

2° q_0 approxime l'unité dans les deux bandes passantes des filtres composants, *q_0 doit donc être une fonction d'impédance d'un coupe-bande.*

Examinons les quatre cas du § 3.5 et montrons que l'hexapôle obtenu satisfait aux conditions de filtrage.

Cas 1.a. Choisissons deux fonctions q_1, q_2 à coupures distinctes de degré pair. — La matrice (2.37) transformée s'écrit :

(3.3) $$X = \left\| \begin{matrix} \dfrac{q_0\,(q_1^2 + q_2^2 - 1)}{q_1 q_2} & \dfrac{q_0}{q_2}\sqrt{q_1^2 - 1} & \dfrac{q_0}{q_1}\sqrt{q_2^2 - 1} \\ \dfrac{q_0}{q_2}\sqrt{q_1^2 - 1} & q_0\,\dfrac{q_1}{q_2} & 0 \\ \dfrac{q_0}{q_1}\sqrt{q_2^2 - 1} & 0 & q_0\,\dfrac{q_2}{q_1} \end{matrix} \right\|$$

C'est une matrice de réactances qui peut être obtenue par mise en série (en parallèle) de deux quadripôles symétriques associés dont les matrices d'impédance (d'admittance) sont respectivement :

$$(3.4)\qquad \begin{Vmatrix} q_0 \dfrac{q_1}{q_2} & \dfrac{q_0}{q_2}\sqrt{q_1^2-1} \\ \dfrac{q_0}{q_2}\sqrt{q_1^2-1} & q_0 \dfrac{q_1}{q_2} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} q_0 \dfrac{q_2}{q_1} & \dfrac{q_0}{q_1}\sqrt{q_2^2-1} \\ \dfrac{q_0}{q_1}\sqrt{q_2^2-1} & q_0 \dfrac{q_2}{q_1} \end{Vmatrix}$$

avec extraction, aux bornes communes, d'une réactance (susceptance) égale à q_0/q_1q_2.

Les quadripôles associés ont donc pour fonctions images :

(3.5) $W_1 = q_0/q_2$, $Q_1 = q_1$ (W_1 et Q_1 sont des fonctions conjuguées avec même facteur irrationnel),
$W_2 = q_0/q_1$, $Q_2 = q_2$ (W_2 et Q_2 sont des fonctions conjuguées avec même facteur irrationnel).

On voit qu'ils ne sont pas complémentaires, au sens du § 3.4.2; mais il est clair que :

$W_1 \simeq 1$ et $Q_2 \simeq 1$ dans la bande passante du passe-bas,

et que $W_2 \simeq 1$ et $Q_1 \simeq 1$ dans la bande passante du passe-haut.

Par le même raisonnement que celui qui a été fait au § 3.6, on peut prévoir que q_1 caractérisera assez bien l'affaiblissement du passe-bas composant, et q_2 l'affaiblissement du passe-haut comportant. Nous donnerons au prochain paragraphe l'expression exacte de l'affaiblissement effectif des filtres dans l'aiguillage.

Cas 1.*b*. *Les fonctions q_1, q_2 de coupures distinctes, sont de degré impair.* — La matrice (2.40) modifiée a pour expression :

$$(3.6)\qquad X = \begin{Vmatrix} q_0 q_1 q_2 & \sqrt{q_1^2-1} & \sqrt{q_2^2-1} \\ \sqrt{q_1^2-1} & q_1/q_0q_2 & 0 \\ \sqrt{q_2^2-1} & 0 & q_2/q_0q_1 \end{Vmatrix}$$

La matrice X résulte de la mise en série (en parallèle) de deux quadripôles antimétriques associés :

$$(3.7)\qquad \begin{Vmatrix} q_0q_1q_2 & \sqrt{q_1^2-1} \\ \sqrt{q_1^2-1} & q_1/q_0q_2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} q_0q_1q_2 & \sqrt{q_2^2-1} \\ \sqrt{q_2^2-1} & q_2/q_0q_1 \end{Vmatrix}$$

avec extraction de la susceptance (réactance) $q_0\, q_1\, q_2$. Les deux quadripôles associés ont respectivement pour fonctions images :

$$(3.8)\qquad W_1 = q_0\, q_2\,, \quad Q_1 = q_1\,; \qquad W_2 = q_0\, q_1\,, \quad Q_2 = q_2\,.$$

Ils ne sont pas complémentaires mais les couples (W_1 Q_1)(W_2, Q_2) sont formés de fonctions conjuguées qui satisfont manifestement aux conditions de filtrage.

Cas 2.*a*. *La fonction q_1 est de degré pair, q_2 de degré impair.* — La matrice de l'hexapôle, dérivée de (2.43) s'écrit :

$$(3.9)\qquad X = \begin{Vmatrix} q_0\, q_1\, q_2 & q_0\, q_2\sqrt{q_1^2-1} & \sqrt{q_2^2-1} \\ q_0\, q_2\sqrt{q_1^2-1} & q_0 q_1 q_2 & 0 \\ \sqrt{q_2^2-1} & 0 & q_1\, q_2/q_0 \end{Vmatrix}$$

Elle résulte de la mise en série (en parallèle) de deux quadripôles associés, l'un symétrique et l'autre antimétrique, définis par :

$$(3.10)\qquad \begin{Vmatrix} q_0\, q_1 q_2 & q_0\, q_2\sqrt{q_1^2-1} \\ q_0\, q_2\sqrt{q_1^2-1} & q_0\, q_1\, q_2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} q_0\, q_2/q_1 & \sqrt{q_2^2-1} \\ \sqrt{q_2^2-1} & q_1\, q_2/q_0 \end{Vmatrix}$$

Avec extraction, aux bornes communes, de la réactance (susceptance) $q_0\, q_2/q_1$. Les quadripôles associés ont donc pour fonctions-images :

$$(3.11)\qquad W_1 = q_0\, q_2\,, \quad Q_1 = q_1\,; \qquad W_2 = q_0/q_1\,, \quad Q_2 = q_2\,.$$

Cas 2.*b*. Le cas (2.*b*) est tout à fait analogue (il suffit de permuter q_1 et q_2).

4.3. **Impédance et affaiblissement effectifs des aiguillages à coupures distinctes.**

Montrons maintenant que l'adaptation aux bornes communes et l'affaiblissement effectif des filtres de l'aiguillage restent très voisins de ceux que l'on peut obtenir avec des aiguillages stricts.

Cas 1.*a*. L'impédance (admittance) effective w_e aux bornes communes résulte de la relation : $w_e = x_{00} - \dfrac{x_{01}^2}{1 + x_{11}} - \dfrac{x_{02}^2}{1 + x_{22}}$. En effectuant les calculs, il vient :

$$\text{(3.12)} \qquad W_e = 1 + (q_0^2 - 1)\,\frac{1 + q_0/q_1\,q_2}{(1 + q_0q_1/q_2)\,(1 + q_0q_2/q_1)}\,.$$

La formule (3.12) montre que w_e approxime d'autant mieux l'unité que q_0 est plus voisin de 1. Or q_0, fonction impédance d'un coupe-bande, reste pratiquement égale à 1 dans les deux bandes passantes. Dans l'interbande au contraire, $q_1 \simeq q_2 \simeq 1$, $w_2 \simeq q_0$ (imaginaire). Il y a une désadaptation totale pour les zéros et les pôles de q_0 ; à ces fréquences d'ailleurs, l'affaiblissement effectif est infini, on peut donc obtenir de cette façon un affaiblissement important dans l'interbande.

Si on choisit une fonction q_0 sans pôle dans l'interbande, w_e ne peut devenir infinie. En effet, le dénominateur de w_e est $(1 + x_{11})\,(1 + x_{22})$ qui ne peut s'annuler, x_{11} et x_{22} étant des réactances. Pour les zéros ou pôles de q_1 et q_2, w_2 reste manifestement finie, et enfin w_2 s'annule si $q_0 = 0$. Il en résulte qu'avec une fonction q_0 sans pôle, les quadripôles composants sont minimum, et entièrement définis par la matrice de l'hexapôle.

Désignons par Γ_1 l'exposant effectif de transfert des bornes 00′ aux bornes 11′ de l'aiguillage. On a :

$$\text{(3.13)} \qquad e^{\Gamma_1} = (1 + w_e)\,(1 + x_{11})/2\,x_{01} = (1 + w_e)\,e^{\Gamma_{m1}}/2\,.$$

Dans le cas d'une mise en série, w_e est l'impédance effective normée vue des bornes 00′, Γ_{m1} l'exposant de transfert des courants du filtre 1. Dans le cas d'une mise en parallèle, w_e sera l'admittance effective, et Γ_{n1}, exposant de transfert des tensions sera substituée à Γ_{m1}.

Le deuxième membre de (3.13) peut s'exprimer en fonction de q_1 et q_2, en utilisant (3.3) et (3.12). Comme w_e reste voisin de l'unité dans les bandes passantes, Γ_1 reste, sauf dans l'interbande, voisin de Γ_{m1}. De façon plus précise, on pourra écrire :

$$\text{(3.14)} \qquad \frac{1+w_e}{2} = 1 + \psi, \qquad \text{avec} \qquad \psi = \frac{q_0^2 - 1}{2}\,\frac{1 + q_0/q_1\,q_2}{(1 + q_0\,q_1/q_2)\,(1 + q_0\,q_2/q_1)}$$

$$\text{(3.15)} \qquad e^{\Gamma_1} = (1 + \psi)\,\frac{q_2 + q_0\,q_1}{q_0\sqrt{q_1^2 - 1}}\,; \qquad e^{\Gamma_2} = (1 + \psi)\,\frac{q_1 + q_0\,q_2}{q_0\sqrt{q_2^2 - 1}}$$

relations à rapprocher des formules (2.47). q_0 étant pratiquement égal à 1 dans les bandes utiles, ψ reste très petit. Γ_1, Γ_2 sont, au terme $\log\,(1 + \psi)$ près, respectivement égaux à l'exposant de transfert de courant (tension), d'un filtre F_1 ayant un affaiblissement sur images q_1, une impédance q_0/q_2 et d'un filtre F_2 ayant un affaiblissement sur images q_2 et une impédance q_0/q_1. L'affaiblissement effectif $A_1 = \mathcal{R}e\;\Gamma_1$ est infini :

a) pour $q_1 = 1$

b) pour les pôles de q_2

c) pour les zéros de q_0.

L'affaiblissement effectif A_2 devient infini :

a) pour $q_2 = 1$

b) pour les pôles de q_1

c) pour les zéros de q_0.

Il est possible de généraliser ainsi la formule (2.45) en écrivant :

$$\text{(3.16)} \qquad 2\,A_1 = \log\,]1 + |\varphi_1|^2] + \log\,|1 + \psi|\,; \qquad 2\,A_2 = \log\,[1 + |\varphi_2|^2] + \log\,|1 + \psi|, \qquad \text{avec :}$$

$$\text{(3.17)} \qquad \varphi_1 = \sqrt{\frac{(q_2/q_0)^2 - 1}{q_1^2 - 1}}\,, \qquad \varphi_2 = \sqrt{\frac{(q_1/q_0)^2 - 1}{q_2^2 - 1}}\,.$$

L'affaiblissement de réflexion aux bornes communes $A_r = \log\left|\dfrac{w_e + 1}{w_e - 1}\right|$ ayant pour valeur :

$$\text{(3.18)} \qquad A_r = \log\,|\,1 + 1/\psi\,|\,.$$

Pour $q_0 \equiv 1$ (coupures confondues), $\psi = 0$ et toutes ces formules se réduisent à celles du § 3.6.

Cas 1.*b*. Le calcul, identique au précédent, conduit aux formules suivantes :

$$\text{(3.19)} \qquad w_e = 1 + \frac{q_0^2 - 1}{q_0^2}\,\frac{1 + q_0q_1\,q_2}{(1 + q_1/q_0\,q_2)\,(1 + q_2/q_0\,q_1)} = 1 + 2\,\psi$$

$$\text{(3.20)} \qquad e^{\Gamma_1} = (1 + \psi)\,\frac{1 + q_1/q_0\,q_2}{\sqrt{q_1^2 - 1}}\,; \qquad e^{\Gamma_2} = (1 + \psi)\,\frac{1 + q_2/q_0\,q_1}{\sqrt{q_2^2 - 1}}$$

(à comparer aux formules 2.49).

L'affaiblissement effectif A_1 est infini :
a) pour $q_1 = 1$
b) pour les zéros de q_2
c) pour les zéros de q_0.

L'affaiblissement effectif A_2 est infini :
a) pour $q_2 = 1$
b) pour les zéros de q_1
c) pour les zéros de q_0.

Les formules (3.16), (3.18) sont applicables avec :

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{q_0\, q_2}\sqrt{\frac{q_0^2\, q_2^2 - 1}{q_1^2 - 1}}\,, \qquad \varphi_2 = \frac{q_2}{q_0\, q_1}\sqrt{\frac{q_0^2\, q_1^2 - 1}{q_2^2 - 1}}\,. \tag{3.21}$$

Cas 2.*a*. L'impédance effective w_e a pour expression :

$$w_e = 1 + \frac{q_0^2 - 1}{q_0}\, q_1\, q_2\, \frac{1 + q_0 q_2/q_1}{(1 + q_1 q_2/q_0)\,(1 + q_0 q_1 q_2)} = 1 + 2\,\psi\,. \tag{3.22}$$

D'autre part :

$$e^{\Gamma_1} = (1 + \psi)\,\frac{1 + q_0\, q_1\, q_2}{q_0\, q_2 \sqrt{q_1^2 - 1}}\,; \qquad e^{\Gamma_2} = (1 + \psi)\,\frac{1 + q_1\, q_2/q_0}{\sqrt{q_2^2 - 1}}\,. \tag{3.23}$$

L'affaiblissement effectif A_1 est infini pour :
a) $q_1 = 1$
b) les zéros de q_2
c) les zéros de q_0.

L'affaiblissement effectif A_2 est infini pour :
a) pour $q_2 = 1$
b) les pôles de q_1
c) les zéros de q_0.

Les formules (3.16), (3.18) restent applicables avec :

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{q_0^2\, q_2^2 - 1}}{q_0\, q_2}\,\frac{1}{\sqrt{q_1^2 - 1}}\,, \qquad \varphi_2 = \frac{q_2}{\sqrt{q_2^2 - 1}}\sqrt{\left(\frac{q_1}{q_1}\right)^2 - 1}\,. \tag{3.24}$$

Cas 2.*b*. Le cas (2 *b*) est identique, il suffit de permuter q_1 et q_2.

Remarque sur la fonction auxiliaire q_0. — La fonction q_0 la plus simple, susceptible de faire disparaître les facteurs irrationnels, est :

$$q_0 = \frac{1}{m_0}\sqrt{\frac{P^2 + m_0^2}{P^2 + m_0^{-2}}}$$

Une telle fonction est une fonction d'impédance d'un « pseudo coupe-bande » car elle ne prend pas la valeur 1 aux extrémités de bandes passantes. En effet, $q_0 = m_0$ pour $P = 0$ et $q_0 = m_0^{-1}$ pour $P = \infty$. Toutefois, si les deux coupures sont très rapprochées, m_0 diffère très peu de l'unité et on pourra en pratique utiliser cette fonction. Pour obtenir une impédance effective plus régulière (et en pratique excellente dans tous les cas usuels), on choisira la fonction du 2e degré :

$$q_0 = \frac{P^2 + 1}{\sqrt{(P^2 + m_0^{-2})\,(P^2 + m_0^2)}}$$

Cette fonction réalise une très bonne approximation de l'unité dans les deux bandes passantes; elle s'annule pour $\Omega = 1$ de sorte que les deux filtres d'un aiguillage faisant intervenir cette fonction ont une fréquence d'affaiblissement infini au milieu de l'interbande.

4.4. Synthèse des aiguillages à coupures distinctes, exemples élémentaires.

La synthèse des aiguillages à coupures distinctes à partir de la matrice d'impédance (ou d'admittance) ne présente pas de difficulté particulière. Elle s'effectue de la même façon que pour les aiguillages stricts.

Premier exemple. — Donnons au passe-bas la fonction d'affaiblissement du premier ordre (classe d'affaiblissement 0,5 — demi-cellule) et au passe-haut de fonction d'affaiblissement du premier ordre également. On aura le cas (2 *a*) avec :

P.B. : $q_1 = \sqrt{P^2 + m_0^{-2}}/P$, $\sqrt{q_1^2 - 1} = 1/m_0 P$; P.H. : $q_2 = \sqrt{P^2 + m_0^2}/m_0$, $\sqrt{q_2^2 - 1} = P/m_0$.

Prenons : $q_0 = \dfrac{P^2 + 1}{\sqrt{(P^2 + m_0^{-2})(P^2 + m_0^2)}}$; la formule (3.6) donne :

$$\begin{cases} x_{00} = q_0\, q_1\, q_2 = (P^2 + 1)/m_0 P ; \quad x_{01} = \sqrt{q_1^2 - 1} = 1/m_0 P ; \quad x_{02} = \sqrt{q_2^2 - 1} = P/m_0 ; \\ x_{11} = q_1/q_0\, q_2 = m_0\,(P^2 + m_0^{-2})/P\,(P^2 + 1) ; \quad x_{22} = q_2/q_0\, q_1 = P\,(P^2 + m_0^2)/m_0\,(P^2 + 1) \end{cases}$$

S'il s'agit d'une mise en parallèle, les éléments qui précèdent sont ceux de la matrice d'admittance.

A) *Filtre passe-bas.* — On peut effectuer le développement à partir de l'admittance en court-circuit vue des bornes 11' :

$$y_{11} = z_{11} = m_0\,(P^2 + m_0^{-2})/P\,(P^2 + 1)$$

Comme on l'a vu au § 4.3, le filtre passe-bas possède une fréquence d'affaiblissement infini au milieu de l'interbande ($P^2 + 1 = 0$, zéro de q_0). L'expression même de y_{11} montre que ce pôle d'affaiblissement s'obtient au moyen d'un circuit résonnant shunt; de plus y_{11} est du troisième degré et devient infini pour $P = 0$.

Le développement en échelle est donc nécessairement conforme à celui de la *fig.* 8. Le calcul des éléments est immédiat, en effet :

$$y_{11} = m_0\,(P^2 + m_0^{-2})/P\,(P^2 + 1) = (m_0 - m_0^{-1})\,P/(P^2 + 1) + m_0^{-1}/P = H_1 P/(P^2 + 1) + H_2/P, \text{ d'où :}$$

$$l_1 = L_1\omega_0/R = H_1^{-1} = 1/(m_0 - m_0^{-1}) ; \quad c_1 = C_1 R\omega_0 = H_1 = m_0 - m_0^{-1} ; \quad l_2 = L_1\omega_0/R = H_2^{-1} = m_0.$$

Le filtre passe-bas composant est entièrement défini par :

$$y'_{00} = 1/m_0 P, \qquad y_{01} = 1/m_0 P, \qquad y_{11} = m_0\,(P^2 + m_0^{-2})/P\,(P^2 + 1)\ .$$

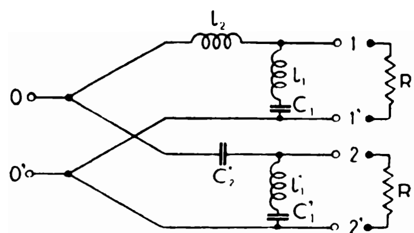


Fig. 8. — *Aiguillage 0,5/0,5 à coupures distinctes.*

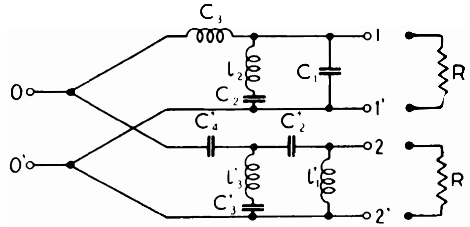


Fig. 9. — *Aiguillage 0,5/1 à coupures distinctes (1re solution).*

B) *Filtre passe-haut.* — $y_{22} = x_{22} = P\,(P^2 + m_0^2)/m_0\,(P^2 + 1)$.

Le pôle de y_{22} correspond à un circuit résonnant shunt; y_{11} est infini pour $P = \infty$, donc le développement en échelle est conforme à la *fig.* 8. On a :

$$y_{22} = P\,(P^2 + m_0^2)/m_0\,(P^2 + 1) = (m_0 - m_0^{-1})\,P/P^2 + 1 + m_0^{-1} P, \qquad \text{d'où :}$$

$$l'_1 = L'_1\,\omega_0/R = (m_0 - m_0^{-1})^{-1}, \quad c'_1 = C'_1\,R\,\omega_0 = m_0 - m_0^{-1}, \quad c'_2 = C'_2\,R\omega_0 = m_0^{-1}.$$

Le passe-haut composant est entièrement défini par :

$$y''_{00} = m_0^{-1}\,P, \qquad y_{02} = m_0^{-1}\,P, \qquad y_{22} = P\,(P^2 + m_0^2)/m_0(P^2 + 1)\ .$$

On a bien, conformément à la théorie :

$$y_{00} = y'_{00} + y''_{00} = x_{00} = (P^2 + 1)/m_0\,P\ .$$

Remarque. — q_1 et q_2 s'échangent si on change P en 1/P (gabarit symétrique). On a alors :

$$l' = c_1^{-1} ; \qquad c'_1 = l_1^{-1} ; \qquad c'_2 = l_2^{-1},$$

de sorte que les éléments du passe-haut sont immédiatement connus lorsque le passe-bas est déterminé.

L'aiguillage très simple qui vient d'être étudié correspond à un affaiblissement effectif pratiquement égal à celui d'une *demi-cellule* pour le passe-bas et d'une *demi-cellule* pour le passe-haut. Les frontières étant décalées, chacun des filtres de cet aiguillage présente en outre une pointe d'affaiblissement effectif infini au milieu de l'interbande.

Deuxième exemple. — Passe-bas de classe d'affaiblissement 0,5; passe-haut de classe d'affaiblissement 1.

Les fréquences d'affaiblissement infini étant à l'infini, on a :

$$\text{P.B. : } q_1 = \sqrt{P^2 + m_0^{-2}}/P, \quad \sqrt{q_1^2 - 1} = 1/m_0 P ;$$

$$\text{P.H. : } q_2 = (P^2 + 2\,m_0^2)/2\,m_0\sqrt{P^2 + m_0^2}\ , \quad \sqrt{q_2^2 - 1} = P^2/2\,m_0\sqrt{P^2 + m_0^2}\ .$$

Cet exemple correspond au cas 2.*b* : on choisira :

$$q_0 = (P^2 + 1)/\sqrt{(P^2 + m_0^{-2})(P^2 + m_0^2)} .$$

A) *Passe-bas.* — S'il s'agit d'une mise en parallèle, on a :

$$y_{11} = q_1 q_2/q_0 = (P^2 + 2m_0^2)(P^2 + 2m_0^{-2})/2m_0 P(P^2 + 1)$$

y_{11} est une réactance du 4e ordre, infini pour $P^2 + 1 = 0$ et pour $P = 0$. La décomposition en éléments simples donne :

$$y_{11} = H_1 P + \frac{H_2 P}{P^2 + 1} + \frac{H_3}{P}$$

avec : $H_1 = 1/2m_0$, $H_2 = (2m_0^2 + m_0^{-2} - 3)/2m_0$, $H_3 = 1/m_0$.

D'où la structure de la *fig.* 9, avec :

$$\begin{cases} c_1 = C_1 R\omega_0 = H_1 = 1/2m_0 \\ l_2 = L_2\omega_0/R = c_2^{-1} = 1/C_2 R\omega_0 = 1/H_2 = 2m_0/(2m_0^2 + m_0^{-2} - 3) \\ l_3 = L_3\omega_0/R = 1/H_3 = m_0 \end{cases}$$

Le passe-bas a pour matrice d'admittances :

$$y'_{00} = 1/m_0 P, \qquad y_{01} = 1/m_0 P, \qquad y_{11} = (P^2 + 2m_0^2)(P^2 + m_0^{-2})/2m_0 P(P^2 + 1) .$$

B) *Passe-haut.* — L'admittance en court-circuit vue des bornes 22′ a pour valeur :

$$y_{22} = q_0 q_1 q_2 = (P^2 + 1)(P^2 + 2m_0^2)/2m_0 P(P^2 + m_0^2) .$$

Le développement peut s'opérer de plusieurs façons.

1re *solution.* — En isolant l'inductance shunt terminale (pôle $\Omega = 0$ de l'admittance y_{22}), on peut écrire :

$y_{22} = H'_1/P + H'_2 P(P^2 + a^2)/2m_0(P^2 + m_0^2)$ avec $H'_1 = 1/m_0$, $H'_2 = 1$, $a^2 = 2m_0^2 - 1$, puis

$2m_0(P^2 + m_0^2)/P(P^2 + a^2) = H'_3/P + H'_4(P^2 + 1)/P(P^2 + a^2)$ (mise en évidence de la fréquence shunt $P^2 + 1 = 0$).

On trouve : $H'_3 = H'_4 = m_0$; enfin : $P(P^2 + a^2)/m_0(P^2 + 1) = H'_5 P + H'_6 P/(P^2 + 1)$

avec : $H'_5 = m_0^{-1}$, $H'_6 = (a^2 - 1)/m_0 = 2(m_0 - m_0^{-1})$.

On est ainsi conduit au shéma de la *fig.* 9 :

$$l'_1 = L'_1\omega_0/P_1 = H_1'^{-1} = m_0 , \qquad c'_2 = C'_2 R\omega_0 = H_3'^{-1} = 1/m_0 ,$$

$$l'_3 = L'_3\omega_0/R = 1/C'_3 R\omega_0 = c_3'^{-1} = H_6'^{-1} = 1/2(m_0 - m_0^{-1}) , \qquad c'_4 = C'_4 R\omega_0 = H'_5 = m_0^{-1} .$$

2e *solution.* — On peut mettre en évidence au départ le zéro de l'admittance correspondant à une fréquence d'affaiblissement infini ($P^2 + 1 = 0$). On est conduit alors à la décomposition suivante :

$$\frac{1}{y_{22}} = \frac{2m_0 P(P^2 + m_0^2)}{(P^2 + 1)(P^2 + 2m_0^2)} = H''_1 \frac{P}{P^2 + 1} + H''_2 \frac{P}{P^2 + 2m_0^2},$$

avec : $H''_1 = \dfrac{2m_0(m_0^2 - 1)}{2m_0^2 - 1}$, $H''_2 = \dfrac{2m_0^3}{2m_0^2 - 1}$.

On obtient ainsi le schéma de la *fig.* 10, avec :

$$l''_1 = L''_1 \frac{\omega_0}{R} = c_1''^{-1} = \frac{1}{C''_1 R\omega_0} = H''_1 = \frac{2m_0(m_0^2 - 1)}{2m_0^2 - 1} ,$$

$$l''_2 = L''_2\omega_0/R = H''^2/2m_0^2 = m_0/(2m_0^2 - 1) ;$$

$$c''_3 = C''_3 R\omega_0 = H_2''^{-1} = (2m_0^2 - 1)/2m_0^3 .$$

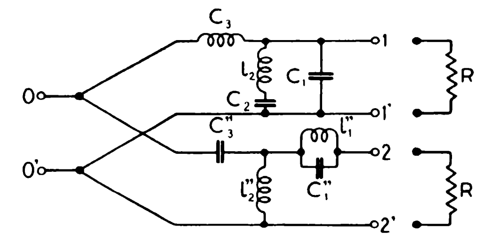


Fig. 10. — *Aiguillage 0,5/1 à coupures distinctes (2e solution équivalente à celle de la fig. 9).*

On peut remarquer que cette deuxième solution comporte deux capacités et deux inductances, contre trois capacités et deux inductances dans la précédente. Elle est donc préférable.

De façon générale, il y a avantage à mettre en évidence en premier lieu les pôles d'affaiblissement infini qui sont des zéros ou des pôles de y_{11} et y_{22}, et qui sont d'ailleurs, en même temps, soit les zéros de q_0, soit certains pôles ou zéros de q_1 et q_2 comme il a été démontré au précédent paragraphe.

V. — AIGUILLAGES PASSE-BANDE, COUPE-BANDE.

5.1. Généralités.

La théorie qui a été faite aux chapitres précédents (aiguillages stricts et aiguillages à coupures distinctes) a été appliquée aux aiguillages passe-haut, passe-bas. Dans certains cas, il faut réaliser des aiguillages passe-bande, coupe-bande et la théorie basée sur les fonctions d'affaiblissement sur images q_1, q_2 (et éventuellement q_0) reste encore valable. La seule différence est que les aiguillages stricts auront deux coupures, communes au passe-bande et au coupe-bande, et les aiguillages d'impédance approximativement constante quatre coupures distinctes.

En pratique, il faut remarquer que le développement en échelle d'un passe-bande est notablement plus compliqué que celui d'un passe-bas, son degré étant pratiquement double pour un affaiblissement donné dans la bande atténuée. Dans le cas où le gabarit d'affaiblissement est très différent dans les deux bandes atténuées du passe-bande, on pourra transposer la théorie générale et calculer directement les deux filtres de l'aiguillage. Dans le cas où le gabarit d'affaiblissement est *symétrique*, c'est-à-dire où l'affaiblissement est le même pour deux fréquences quelconques ayant le milieu de la bande passante pour moyenne géométrique, on peut ramener le problème à celui de la spécification d'un aiguillage passe-haut, passe-bas, grâce à une transformation fréquentielle. Nous nous bornerons à étudier ce dernier cas dans ce chapitre.

5.2. Aiguillages passe-bande, coupe-bande, d'impédance constante.

Désignons par ω_{-1}, ω_1 les pulsations de coupure communes au passe-bande et au coupe-bande, et appelons $\omega_0 = \sqrt{\omega_{-1}\,\omega_1}$ la pulsation centrale. Il est bien connu que la transformation fréquentielle :

(4.1) $$P = (p^2 + \omega_1\,\omega_{-1})/(\omega_1 - \omega_{-1})\,p\ , \quad \Omega = (\omega_0^2 - \omega^2)/\omega\,(\omega_1 - \omega_{-1})$$

où $p = j\omega$ et $P = j\Omega$ transforme une inductance en circuit résonnant et une capacité en circuit bouchon. Par ailleurs, cette transformation associe à la fonction d'affaiblissement q_1 d'un passe-bande une fonction d'affaiblissement Q_1 d'un passe-bas, car en posant :

(4.2) $$q_1 = (p^2 + \omega_0^2)/\sqrt{(p^2 + \omega^2_{-1})\,(p^2 + \omega_1^2)}\ , \qquad \text{il vient :}$$

(4.3) $$Q_1 = P/\sqrt{P^2 + 1}\ .$$

Supposons donc que le gabarit d'affaiblissement du passe-bande et du coupe-bande, gabarit symétrique par rapport à ω_0, est tracé pour les valeurs de Ω définies par la relation (4.1). Le gabarit A (Ω) est un gabarit d'aiguillage passe-haut passe-bas dont la coupure unique a pour valeur normée 1.

On calculera donc les éléments de l'aiguillage strict passe-bas-passe-haut satisfaisant ce gabarit, puis il suffit, pour obtenir l'aiguillage passe-bande-coupe-bande désiré, d'effectuer sur les éléments eux-mêmes la transformation classique définie par la formule (4.1). On substitue à une inductance normée l du passe-bas (ou du passe-haut) le circuit résonnant L_1C_1, à une capacité normée C du passe-bas (ou du passe-haut) le circuit bouchon L_2C_2 avec :

(4.4) $$L_1 = \frac{R\,l}{\omega_1 - \omega_{-1}}\ , \quad L_2 = \frac{R\,(\omega_1 - \omega_{-1})}{c\,\omega_1\,\omega_{-1}}\ , \quad C_1 = \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{R\,l\,\omega_1\,\omega_{-1}}\ , \quad C_2 = \frac{c}{R\,(\omega_1 - \omega_{-1})}\ .$$

(4.5) Si on pose : $$\omega_1/\omega_0 = \sqrt{\omega_1/\omega_{-1}} = m_0\ , \qquad m_0 - m_0^{-1} = \delta,$$

les formules (4.4) peuvent encore s'écrire :

(4.6) $$L_1\,\omega_0/R = l/\delta\ , \quad L_2\,\omega_0/R = \delta/c\ , \quad C_1\,R\omega_0 = \delta/l\ , \quad C_2\,R\omega_0 = c/\delta\ .$$

Le problème est ainsi entièrement résolu.

5.3. Aiguillages passe-bande, coupe-bande, à quatre coupures distinctes.

Soit un passe-bande, à gabarit symétrique dont les pulsations de coupure sont désignées par ω'_{-1}, ω'_1 et un coupe-bande à gabarit symétrique dont les coupures sont ω''_{-1}, ω''_1 (en ordre croissant : ω''_{-1}, ω'_{-1}, ω_0, ω'_1, ω''_1).

La symétrie du gabarit se traduit par :

(4.7) $$\omega_0^2 = \omega'_{-1}\,\omega'_1 = \omega''_{-1}\,\omega''_1\ .$$

Nous pouvons généraliser la transformation fréquentielle classique du paragraphe précédent.

Posons en effet :

(4.8) $$m_0 = \sqrt{(\omega''_1 - \omega''_{-1})/(\omega'_1 - \omega'_{-1})}\ ;$$ (4.9) $$\omega_0\,\delta = \sqrt{(\omega''_1 - \omega''_{-1})\,(\omega'_1 - \omega'_{-1})}$$

et étudions la transformation fréquentielle :

(4.10) $$P = (p^2 + \omega_0^2)/\delta\,p\,\omega_0\ , \qquad \Omega = (\omega_0^2 - \omega^2)/\delta\,\omega\,\omega_0\ .$$

(4.10) est évidemment une transformation de réactance qui associe un circuit résonnant à une inductance et un bouchon à une capacité. Elle transforme par ailleurs les fonctions d'affaiblissement Q_1

d'un passe-bas de coupure normé m_0^{-1} et Q_2 d'un passe-haut de coupure normé m_0 en fonctions d'affaiblissement de passe-bande et de coupe-bande. En effet prenons :

$$Q_1 = P/\sqrt{P^2 + m_0^{-2}}\,. \tag{4.11}$$

Sa transformée q_1 est d'après (4.10) :

$$(p^2 + \omega_0^2)/\sqrt{(p^2 + \omega'^2_{-1})\,(p^2 + \omega'^2_1)} \tag{4.12}$$

donc précisément la fonction q_1 d'un passe-bande de coupure ω'_{-1}, ω'_1.

De même la fonction normée de passe-haut :

$$Q_2 = m_0/\sqrt{P^2 + m_0^2} \qquad \text{donne :} \tag{4.13}$$

$$q_2 = (\omega''_1 - \omega''_{-1})p/\sqrt{(p^2 + \omega''^2_{-1})\,(p^2 + \omega''^2_1)} \tag{4.14}$$

et q_2 est la fonction d'affaiblissement d'un coupe-bande de coupures ω''_{-1}, ω''_1. On opérera donc exactement comme dans le cas des aiguillages stricts (§ 5.2) :

Le gabarit d'affaiblissement est transformé en gabarit d'aiguillage passe-bas, passe-haut, par la transformation (4.10) où δ a la valeur (4.9). On calcule alors les éléments de l'aiguillage passe-bas-passe-haut à coupures distinctes satisfaisant au nouveau gabarit. Pour obtenir l'aiguillage définitif, il suffit de remplacer chaque inductance normée l par un circuit résonnant L_1C_1, chaque capacité par un bouchon L_2C_2 avec :

$$L_1\,\omega_0/R = l/\delta\ ; \qquad L_2\,\omega_0/R = \delta/c\ ; \qquad C_1\,R\omega_0 = \delta/l\ ; \qquad C_2\,R\omega_0 = c/\delta\,. \tag{4.15}$$

Les formules (4.15) sont identiques aux formules (4.6) mais δ a la valeur (4.9) et non (4.5). Il est donc possible de généraliser la transformation de réactances classique dans le cas des coupures distinctes, ce qui résout complètement le problème des aiguillages passe-bande-coupe-bande à gabarit symétrique.

Remarque. — Lorsque les coupures viennent à se confondre, la formule (4.8) donne $m_0 = 1$ et (4.9) se réduit à (4.5).

VI. — MISE EN SÉRIE OU EN PARALLÈLE DES FILTRES DE BANDE.

La théorie des aiguillages à coupures distinctes peut s'étendre au cas plus complexe de l'association en série ou en parallèle de deux ou plusieurs filtres de bande. En effet, les matrices (3.3), (3.6), (3.9) du § 4.2 sont les matrices de réactances d'un hexapôle constitué par deux filtres de bande si q_1, q_2 sont des fonctions d'affaiblissement de deux filtres de bande associés et si q_0 est une fonction complémentaire choisie de façon à faire disparaître tous les termes irrationnels. On pourra déterminer dans chaque cas particulier la forme particulière à donner à la fonction q_0 pour que la matrice X soit effectivement une matrice de réactances.

La théorie peut encore se généraliser au cas de plusieurs quadripôles placés en série ou en parallèle. A titre d'exemple la matrice d'ordre n :

$$X = \left\| \begin{matrix} q_0\,q_1\,q_2 \dots q_n & \sqrt{q_1^2 - 1} & \sqrt{q_2^2 - 1} & & \sqrt{q_n^2 - 1} \\ \sqrt{q_1^2 - 1} & \dfrac{q_1}{q_0\,q_2 \dots q_n} & 0 & & 0 \\ \sqrt{q_2^2 - 1} & 0 & \dfrac{q_2}{q_0\,q_1\,q_2 \dots q_n} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{q_n^2 - 1} & 0 & 0 & & \dfrac{q_n}{q_0\,q_1 \dots q_{n-1}} \end{matrix} \right\| \tag{5.1}$$

où $q_1, \dots, q_n$ sont des fonctions d'affaiblissement de passe-bandes antimétriques et q_0 la fonction complémentaire :

$$q_0 = \frac{K}{p}\sqrt{\frac{(p^2 + \omega^2_{-11})\,(p^2 + \omega^2_{-12})\ \dots\dots\ (p^2 + \omega^2_{-1n})}{(p^2 + \omega^2_{11})\,(p^2 + \omega^2_{12})\ \dots\dots\ (p^2 + \omega^2_{1n})}}$$

est la matrice d'aiguillage d'un réseau comportant n filtres de bande en série ou en parallèle. Dans (5.2), K est une constante arbitraire, ω_{-1k}, ω_{1k} les coupures inférieure et supérieure de la fonction q_k. Il faut remarquer que dans q_0^2, les pôles et les zéros sont alternés.

On peut vérifier que ce processus permet de réaliser de façon très satisfaisante la mise en série ou en parallèle des filtres de bande, mais en pratique les calculs sont compliqués dès que les classes

d'affaiblissement et le nombre de filtres sont élevés. Nous nous bornerons ici à donner un exemple très simple pour illustrer la théorie.

Exemple. — Soit à réaliser la mise en parallèle de deux filtres passe-bande antimétriques élémentaires, pratiquement équivalents à deux *demi-cellules canoniques* (2/2 KK'). Désignons par ω'_{-1}, ω'_1 les fréquences de coupure du premier, par ω''_{-1}, ω''_1 celles du second ($\omega'_{-1} < \omega'_1 < \omega''_{-1} < \omega''_1$).

Les fonctions q_1 et q_2 ont pour expression :

(5.2) $$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\sqrt{(p^2+\omega'^2_{-1})(p^2+\omega'^2_1)}}{p^2+\omega'^2_0} & \text{avec} \quad \omega'_0 = \sqrt{\omega'_{-1}\,\omega'_1} \\ q_2 = \dfrac{\sqrt{(p^2+\omega''^2_{-1})(p^2+\omega''^2_1)}}{p^2+\omega''^2_0} & \text{avec} \quad \omega''_0 = \sqrt{\omega''_{-1}\,\omega''_1} \end{cases}$$

En prenant comme pulsation de référence $\omega_0 = \sqrt{\omega'_0\,\omega''_0}$ nous choisirons la fonction auxiliaire la plus simple possible :

(5.3) $$q_0 = \frac{\omega_0}{p}\sqrt{\frac{(p^2+\omega'^2_{-1})(p^2+\omega''^2_{-1})}{(p^2+\omega'^2_1)(p^2+\omega''^2_1)}}\,.$$

Dans la bande de chacun des filtres, q_0 est réelle et varie de 0 à l'infini. La matrice d'admittance est donnée par (5.1) avec $n = 2$. Les conditions d'impédance et d'affaiblissement sont manifestement satisfaites car on peut considérer l'aiguillage comme constitué des deux filtres antimétriques :

(5.4) $$\left\|\begin{matrix} q_0\,q_2\,q_1 & \sqrt{q_1^2-1} \\ \sqrt{q_1^2-1} & q_1/q_0\,q_2 \end{matrix}\right\|, \qquad \left\|\begin{matrix} q_0\,q_1\,q_2 & \sqrt{q_2^2-1} \\ \sqrt{q_2^2-1} & q_2/q_0\,q_1 \end{matrix}\right\|$$

avec soustraction, à la paire de bornes communes, de la susceptance $q_0q_1q_2$. Ces filtres associés ont respectivement pour grandeurs images :

(5.5) $$Q_1 = q_1 = \frac{\sqrt{(p^2+\omega'^2_{-1})(p^2+\omega'_1)^2}}{p^2+\omega'^2_0}\,; \qquad W_1 = q_0\,q_2 = \frac{\omega_0}{p}\,\frac{p^2+\omega''^2_{-1}}{p^2+\omega''^2_0}\sqrt{\frac{p^2+\omega'^2_{-1}}{p^2+\omega'^2_1}}\,,$$

(5.6) $$Q_2 = q_2 = \frac{\sqrt{(p^2+\omega''^2_{-1})(p^2+\omega''^2_1)}}{p^2+\omega''^2_0}\,; \qquad W_2 = q_0\,q_1 = \frac{\omega_0}{p}\,\frac{p^2+\omega'^2_1}{p^2+\omega'^2_0}\sqrt{\frac{p^2+\omega''^2_{-1}}{p'+\omega''^2_1}}\,.$$

Chacun d'eux a une fonction d'affaiblissement sur images de deuxième ordre (2/2 KK') et une impédance du quatrième ordre. Avec les notations employées dans un autre article [12], on peut les désigner par 2/2 KK' $d_{0-1}\,d_{0-1}^*$. Il est clair d'après les raisonnements faits aux chapitres précédents, que les filtres composants de l'aiguillage ont un affaiblissement et une impédance très voisine de ceux des filtres associés. Effectuons maintenant la synthèse de cet aiguillage. Les quatre paramètres ω_{-1}, ω'_1, ω''_{-1}, ω''_1 peuvent se réduire à trois en effectuant une normalisation. Nous avons déjà choisi comme pulsation de référence la moyenne géométrique des pulsations de coupure : $\omega_0^4 = \omega'_{-1}\,\omega'_1\,\omega''_{-1}\,\omega''_1$. Posons par surcroît :

(5.7) $$P = j\,\Omega = j\,\omega/\omega_0$$

(5.8) $$m'_0 = \sqrt{\omega'_1/\omega'_{-1}}, \qquad m''_0 = \sqrt{\omega''_1/\omega''_{-1}}\,; \qquad \delta' = (m'_0 - m'^{-1}_0), \qquad \delta'' = (m''_0 - m''^{-1}_0)$$

(5.9) $$\sigma^2 = \omega''_0/\omega'_0 = \sqrt{\omega''_{-1}\,\omega''_1/\omega'_{-1}\,\omega'_1} \qquad (m'_0 > 1,\ m''_0 > 1,\ \sigma > 1).$$

Avec ces notations, la matrice d'admittance de l'hexapôle prend la forme :

(5.10) $$\begin{cases} y_{00} = q_0\,q_1\,q_2 = \dfrac{(P^2+m'^{-2}_0\,\sigma^{-2})(P^2+m''^{-2}_0\,\sigma^2)}{P\,(P^2+\sigma^{-2})(P^2+\sigma^2)}\,; & y_{01} = \sqrt{q_1^2-1} = \sigma^{-1}\,\delta'\,\dfrac{P}{P^2+\sigma^{-2}}\,; \\ y_{11} = \dfrac{q_1}{q_0\,q_2} = \dfrac{P\,(P^2+m'^2_0\,\sigma^{-2})(P^2+\sigma^2)}{(P^2+\sigma^{-2})(P^2+m''^{-2}_0\,\sigma^2)}\,; & y_{02} = \sqrt{q_2^2-1} = \sigma\,\delta''\,\dfrac{P}{P^2+\sigma^2}\,; \\ y_{22} = \dfrac{q_2}{q_0\,q_1} = \dfrac{P\,(P^2+\sigma^{-2})(P^2+m''^2_0\,\sigma^2)}{(P^2+\sigma^2)(P^2+m'^{-2}_0\,\sigma^{-2})}\,. & \end{cases}$$

Faisons d'abord une remarque sur l'affaiblissement des filtres de l'aiguillage. Alors que l'affaiblissement sur images des filtres associés est infini uniquement aux fréquences nulle et infinie (type KK') l'affaiblissement effectif des composants dans l'aiguillage est infini par surcroît :

— dans le cas du filtre F_1, pour $q_0q_2 = 0$ (facteur $P^2 + m''^{-2}_0\,\sigma^{-2}$),

— dans le cas du filtre F_2, pour $q_0q_1 = 0$ (facteur $P^2 + m'^{-2}_0\,\sigma^{-2}$).

D'autre part, l'admittance effective aux bornes communes ne reste pas finie à toute fréquence, mais devient infinie à l'origine (pôle de q_0). L'existence de ces pôles d'affaiblissement et d'admittance effectifs résulte clairement des formules (3.19) et (3.20) du chapitre IV.

Réalisation de l'aiguillage par la méthode de décomposition de Cauer. — Le quadripôle F_1 a pour matrice d'admittance : y'_{00}, y_{01}, y_{11}, le quadripôle F_2 : y'_{00}, y_{02}, y_{22}; y'_0 et y''_{00} vérifiant la relation :

(5.11) $$y_{00} = y'_{00} + y''_{00}.$$

y'_{00} et y''_{00} sont inconnues, mais la décomposition de y_{00} en éléments simples donne :

(5.12) $$y_{00} = \frac{h_1}{P} + \frac{h_2 P}{P^2 + \sigma^{-2}} + \frac{h_3 P}{P^2 + \sigma^2} = \frac{(P^2 + m_0'^{-2} \sigma^{-2})(P^2 + m_0''^{-2} \sigma^2)}{P(P^2 + \sigma^{-2})(P^2 + \sigma^2)}.$$

On trouve sans difficulté :

(5.13) $$h_1 = m_0'^{-2} m_0''^{-2} \; ; \; h_2 = \frac{(1 - m_0'^{-2})(m_0''^{-2} \sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma^2 - \sigma^{-2}} \; ; \; h_3 = \frac{(1 - m_0''^{-2})(\sigma^2 - m_0'^{-2} \sigma^{-2})}{\sigma^2 - \sigma^{-2}}.$$

Les termes connus de la matrice d'admittance de F_1 se décomposent comme suit :

(5.14) $$y_{11} = \frac{P(P^2 + m_0'^2 \sigma^{-2})(P^2 + \sigma^2)}{(P^2 + \sigma^2)(P^2 + m_0''^{-2} \sigma^2)} = h'_1 P + \frac{h'_2 P}{P^2 + \sigma^{-2}} + \frac{h'_3 P}{P^2 + m_0''^{-2} \sigma^2} \; ; \quad y_{01} = \sigma^{-1} \delta' \frac{P}{P^2 + \sigma^{-2}}.$$

avec :

(5.15) $$\begin{cases} h'_1 = 1 \; ; \qquad h'_2 = \dfrac{\sigma^{-2}(\sigma^2 - \sigma^{-2})(m_0'^2 - 1)}{m_0''^{-2} \sigma^2 - \sigma^{-2}} \; ; \\ h'_3 = \dfrac{\sigma^2 (m_0''^{-2} \sigma^2 - m_0'^2 \sigma^{-2})(1 - m_0''^{-2})}{m_0''^{-2} \sigma^2 - \sigma^{-2}}. \end{cases}$$

Les termes de la matrice d'admittance de F_2 se décomposent comme suit :

(5.16) $$\begin{cases} y_{22} = \dfrac{P(P^2 + \sigma^{-2})(P^2 + m_0''^2 \sigma^2)}{(P^2 + \sigma^2)(P^2 + m_0'^{-2} \sigma^{-2})} = h''_1 P + \dfrac{h''_2 P}{P^2 + \sigma^{-2} m_0'^{-2}} + h''_3 \dfrac{P}{P^2 + \sigma^2} \; ; \\ y_{02} = \sigma \delta'' \dfrac{P}{P^2 + \sigma^2} \end{cases}$$

avec :

(5.17) $$\begin{cases} h''_1 = 1 \; ; \qquad h''_2 = \dfrac{\sigma^{-2}(1 - m_0'^{-2})(m_0''^2 \sigma^2 - m_0'^{-2} \sigma^{-2})}{\sigma^2 - m_0'^{-2} \sigma^2} \; ; \\ h''_3 = \dfrac{\sigma^2 (m_0''^2 - 1)(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma^2 - m_0'^{-2} \sigma^{-2}}. \end{cases}$$

Si on pose, α étant un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité :

(5.18) $$y'_{00} = \frac{\alpha h_1}{P} + \frac{h_2 P}{P^2 + \sigma^{-2}} \; ; \qquad y''_{00} = \frac{(1 - \alpha) h_1}{P} + \frac{h_3 P}{P^2 + \sigma^2}$$

la relation (5.11) est satisfaite, tous les résidus des pôles satisfaisant à la condition de couplage serré. En effet, pour le filtre F_1, on a :

pour le pôle $P = 0$: $\alpha h_1 \times 0 - 0 = 0.$
— pour le pôle $P = \infty$: $0 \times h'_1 - 0 = 0.$
— pour le pôle $P^2 = - m_0''^{-2} \sigma^2$: $0 \times h'_3 - 0 = 0.$
— pour le pôle $P^2 = - \sigma^{-2}$:

$$h_2 h'_2 - \sigma^{-2} \delta'^2 = \frac{m_0'^{-1} \delta' (m_0''^{-2} \sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma^2 - \sigma^{-2}} \times \frac{\sigma^{-2} m_0' \delta' (\sigma^2 - \sigma^{-2})}{m_0''^{-2} \sigma^2 - \sigma^{-2}} - \sigma^{-2} \delta'^2 = 0.$$

Il en est de même pour le quadripôle F_2.

Le pôle $P = 0$ qui n'existe que dans l'expression de y_{00} correspond simplement à la mise en parallèle d'une inductance aux bornes. On peut la scinder en deux inductances arbitraires $\frac{\alpha h_1}{P}$, $\frac{(1-\alpha) h_1}{P}$ affectées au filtre F_1 et au filtre F_2, et réalisant une admittance h_1/P. Il est encore plus simple d'en faire totalement abstraction et de considérer l'aiguillage comme formé de deux filtres *minimum* d'admittance effective finie à toute fréquence, complétés par l'admittance shunt commune h_1/P.

Dès lors, la réalisation des deux filtres F_1 et F_2 est immédiate d'après les résultats de l'annexe I. On écrira les matrices de (F_1) et (F_2) sous la forme :

(5.19) $$Y_1 = \frac{P}{P^2 + \sigma^{-2}} \begin{Vmatrix} h_2 & \sigma^{-1} \delta' \\ \sigma^{-1} \delta' & h'_2 \end{Vmatrix} + \frac{P}{P^2 + m_0''^{-2} \sigma^2} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h'_3 \end{Vmatrix} + P \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h'_1 \end{Vmatrix}$$

(5.20) $$Y_2 = \frac{P}{P^2 + \sigma^2} \begin{Vmatrix} h_3 & \sigma \delta'' \\ \sigma \delta'' & h''_3 \end{Vmatrix} + \frac{P}{P^2 + m_0'^{-2} \sigma^{-2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h''_2 \end{Vmatrix} + P \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h''_1 \end{Vmatrix}$$

Chacun des quadripôles comporte, comme pour la *fig.* A7, un transformateur parfait.

En réunissant les deux transformateurs en un transformateur unique à trois enroulements $(1, n_1, n_2)$ et en tenant compte de l'inductance shunt h_1/P, on obtient le schéma de la *fig.* 11.

Dans ce schéma, on a :

$$n_1 = -\frac{\sigma h_2}{\delta'} = \frac{-\sigma(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})}{m_0'(\sigma^2 - \sigma^{-2})}, \qquad n_2 = -\frac{h_3}{\sigma\delta''} = -\frac{(\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2})}{\sigma^2 m_0''(\sigma^2 - \sigma^{-2})}$$

et les éléments ont les valeurs suivantes :

$$(5.21)\begin{cases} l_1' = \dfrac{\mathrm{L}_1'\omega_0}{\mathrm{R}} = h_3'^{-1} = \dfrac{m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2}}{\sigma^2(m_0''^{-2}\sigma^2 - m_0'^2\sigma^{-2})(1 - m_0''^{-2})} & l_1'' = \mathrm{L}_1''\dfrac{\omega_0}{\mathrm{R}} = h_2''^{-1} = \dfrac{\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2}}{\sigma^{-2}(1 - m'^{-2})(m_0''^2\sigma^2 - m'^2\sigma^{-2})} \\ c_1' = \mathrm{C}_1'\mathrm{R}\omega_0 = h_3' m_0''^2\sigma^{-2} = \dfrac{(m_0''^2 - 1)(m_0''^{-2}\sigma^2 - m_0'^2\sigma^{-1})}{m_0''^2\sigma^2 - \sigma^{-2}} & c_1'' = \mathrm{C}_1''\mathrm{R}\omega_0 = h_2'' m_0'^2\sigma^2 = \dfrac{(m_0'^2 - 1)(m_0''^2\sigma^2 - m_0'^2\sigma^{-2})}{\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2}} \\ c_2' = \mathrm{C}_2'\,\mathrm{R}\omega_0 = h_1' = 1 & c_2'' = \mathrm{C}_2''\,\mathrm{R}\omega_0 = h_1'' = 1 \\ l_3' = \mathrm{L}_3'\dfrac{\omega_0}{\mathrm{R}} = h_2'^{-1} = \dfrac{(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})\sigma^2}{(\sigma^2 - \sigma^{-2})(m_0'^2 - 1)} & l_3'' = \mathrm{L}_3''\dfrac{\omega_0}{\mathrm{R}} = h_3''^{-1} = \dfrac{\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2}}{\sigma^2(m_0''^2 - 1)(\sigma^2 - \sigma^{-2})} \\ c_3' = \mathrm{C}_3'\mathrm{R}\omega_0 = h_2'\sigma^2 = \dfrac{(\sigma^2 - \sigma^{-2})(m_0'^2 - 1)}{m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2}} & c_3'' = \mathrm{C}_3''\mathrm{R}\omega_0 = h_3''\sigma^{-2} = \dfrac{(m_0''^2 - 1)(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{m_0''^2\sigma^2 - \sigma^{-2}} \end{cases}$$

et enfin :

$$(5.22) \qquad l = \mathrm{L}\,\omega_0/\mathrm{R} = h_1^{-1} = m_0'^2\, m_0''^2.$$

Le schéma de la *fig.* 11 est intéressant car il ne comporte qu'un seul transformateur à trois enroulements. Il apparaît nettement qu'il ne diffère d'un schéma en échelle que par la transformation d'impédance qui n'est pas la même pour les deux filtres. On peut évidemment éviter tout transformateur en faisant passer tous les éléments réactifs du côté des bornes communes 00′ et en donnant au filtre F_1 une résistance de fermeture R_1/n_1^2, au filtre F_2 une résistance de fermeture R/n_2^2.

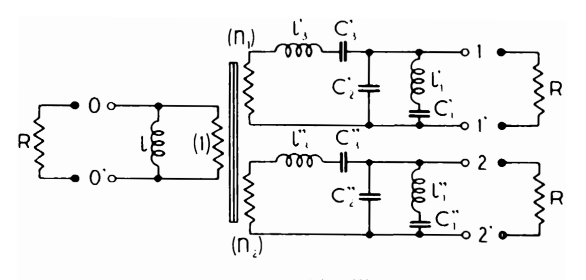


Fig. 11. — *Aiguillage formé de deux passe-bande* (2/2 KK′).

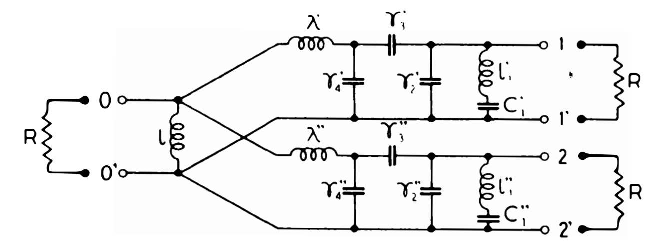


Fig. 12. — *Aiguillage formé de deux passe-bande* (2/2 KK′) *(Variante)*.

Il est d'ailleurs possible, pour certaines valeurs des paramètres, d'assurer ces transformations d'impédance à l'aide d'un réseau de capacités, suivant le principe bien connu imaginé par Norton. On parvient alors au schéma de la *fig.* 12 dont les éléments peuvent être calculés directement de la manière suivante.

Pour le filtre F_1 on a d'après (5.14) :

$$y_{11} = \frac{h_3'\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + m_0''^{-2}\sigma^2} + \frac{[h_1'\mathrm{P}^2 + h_1'\sigma^{-2} + h_2']\,\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + \sigma^{-2}}.$$

Le terme $\dfrac{h_3'\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + m_0''^{-2}\sigma^2}$ correspond au même circuit résonnant série $l_1'\,c_1'$ disposé entre les bornes 11′ que dans le cas précédent. On a par ailleurs :

$$(5.23) \qquad \frac{[h_1'\mathrm{P}^2 + h_1'\sigma^{-2} + h_2']\,\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + \sigma^{-2}} = \frac{\mathrm{P}\left[\left(\gamma_2' + \dfrac{\gamma_3'\gamma_4'}{\gamma_3' + \gamma_4'}\right)\mathrm{P}^2 + \lambda'^{-1}\left(\dfrac{\gamma_2' + \gamma_3'}{\gamma_3' + \gamma_4'}\right)\right]}{\mathrm{P}^2 + \lambda'^{-1}(\gamma_3' + \gamma_4')^{-1}}.$$

L'admittance vue des bornes 00′, le terme h_1/P étant exclu s'écrit de même :

$$(5.24) \qquad \frac{h_2\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + \sigma^{-2}} = \frac{\lambda'^{-1}\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2 + \lambda'^{-1}(\gamma_3' + \gamma_4')^{-1}}.$$

L'identification des constantes dans (5.23) et (5.24) conduit aux relations :

$$\gamma_2' + \frac{\gamma_3'\gamma_4'}{\gamma_3' + \gamma_4'} = h_1' = 1\ ; \quad \lambda'^{-1}\left[\frac{\gamma_2' + \gamma_3'}{\gamma_3' + \gamma_4'}\right] = h_2' + h_1'\sigma^{-2} = h_2' + \sigma^{-2}\ ; \quad \frac{\lambda'^{-1}}{\gamma_3' + \gamma_4'} = \sigma^{-2}\ ; \quad \lambda' = h_2^{-1}.$$

La première équation s'écrit :

$$\gamma_3'\gamma_4'/(\gamma_3' + \gamma_4') = 1 - \gamma_2' .$$

Par soustraction de la troisième à la seconde, il vient :

$$\frac{h_2[\gamma_2' - 1 + \gamma_3']}{\gamma_3' + \gamma_4'} = h_2\left[\frac{\gamma_3'\gamma_4'}{\gamma_3' + \gamma_4'}\cdot\frac{1}{\gamma_4'} - \frac{(1-\gamma_2')}{\gamma_3' + \gamma_4'}\right] = (1-\gamma_2')\,h_2\left[\frac{1}{\gamma_4'} - \frac{1}{\gamma_3' + \gamma_4'}\right] = h_2'$$

soit encore :

$$(1-\gamma_2')^2 = \gamma_4'^2\,\frac{h_2'}{h_2}\ ; \qquad 1 - \gamma_2' = \frac{\gamma_3'\gamma_4'}{\gamma_3' + \gamma_4'} = \gamma_4'\sqrt{\frac{h_2'}{h_2}} .$$

Des relations : $\gamma_3'/(\gamma_3' + \gamma_4') = \sqrt{h_2'/h_2}\ ; \quad 1/(\gamma_3' + \gamma_4') = h_2^{-1}\sigma^{-2},$ on tire :

$$(5.25)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma_3' &= \sigma^2\sqrt{h_2 h_2'} = \sigma(m_0' - m_0'^{-1}) = \sigma\delta' && = \Gamma_3' R\omega_0 \\ \gamma_4' &= h_2\sigma^2 - \sigma\delta' = \sigma\delta'\left[\frac{\sigma(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})}{m_0'(\sigma^2 - \sigma^{-2})} - 1\right] && = \Gamma_4' R\omega_0 \\ \gamma_2' &= 1 - \gamma_4'\sqrt{\frac{h_2'}{h_2}} = 1 - \sigma\delta'\left[1 - \frac{m_0'(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})}\right] && = \Gamma_2' R\omega_0 \end{aligned}\right.$$

Enfin :

$$\lambda' = h_2^{-1} = \frac{\sigma^2 - \sigma^{-2}}{(1 - m_0'^{-2})(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})} = \Lambda'\,\frac{\omega_0}{R} .$$

Les capacités sont positives, donc le schéma physiquement réalisable, pourvu que les inégalités :

$$\frac{m_0'(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})} \leqslant 1\ , \qquad \sigma\delta'\left[1 - \frac{m_0'(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})}\right] \leqslant 1$$

soient satisfaites.

Le calcul est absolument identique pour le filtre F_2 et conduit aux relations :

$$(5.26)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma_3'' = \Gamma_3'' R\omega_0 = \sigma^{-1}(m_0'' - m_0''^{-1}) = \sigma^{-1}\delta'', \qquad \gamma_4'' = \Gamma_4'' R\omega_0 = \sigma^{-1}\delta''\left[\frac{\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2}}{m_0''\sigma(\sigma^2 - \sigma^{-2})} - 1\right], \\ &\gamma_2'' = \Gamma_2'' R\omega_0 = 1 - \sigma^{-1}\delta''\left[1 - \frac{m_0''\sigma(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2}}\right], \qquad \lambda'' = \Lambda''\frac{\omega_0}{R} = h_3^{-1} = \frac{\sigma^2 - \sigma^{-2}}{(1 - m_0'^{-2})(m_0''^{-2}\sigma^2 - \sigma^{-2})} . \end{aligned}\right.$$

Le filtre F_2 est physiquement réalisable suivant le schéma de la *fig.* 20 si les inégalités :

$$\frac{m_0''\sigma(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2}} \leqslant 1\ , \qquad \sigma^{-1}\delta''\left[1 - \frac{m_0''\sigma(\sigma^2 - \sigma^{-2})}{\sigma^2 - m_0'^{-2}\sigma^{-2}}\right] \leqslant 1$$

sont satisfaites.

VII. — AIGUILLAGES OCTOPOLES D'IMPÉDANCE CONSTANTE.

7.1. Principe.

Une généralisation intéressante de l'aiguillage hexapôle passe-bas-passe-haut d'impédance effective constante, étudié aux chapitres III et IV est constituée par l'octopôle représenté schématiquement sur la *fig.* 13. Un tel aiguillage comporte deux filtres passe-bas et deux filtres passe-haut disposés de telle façon que chaque paire de bornes d'un passe-bas est reliée à une paire de bornes d'un passe-haut. Sur la figure, les filtres ont été disposés en parallèle, mais ils pourraient aussi bien être disposés en série; l'ensemble possède quatre accès équivalents.

Un tel montage a un intérêt pratique certain : dans beaucoup de systèmes à courants porteurs à deux fils et à deux bandes de fréquences, on utilise un schéma de ce genre, les bornes opposées 11' et 33' étant réunies par exemple à deux sections de câble successives, les bornes 22' et 44' étant connectées respectivement à l'entrée et à la sortie d'un amplificateur unique utilisé pour les deux sens de transmission.

Nous allons étudier ce montage et montrer qu'il est possible de spécifier les filtres de l'aiguillage de telle façon que l'impédance effective reste constante, à toute fréquence, pour toutes les paires de bornes — celles-ci étant d'ailleurs équivalentes et permutables. Une autre propriété de ce montage est l'absence complète d'interaction entre les bornes opposées 11'-33' d'une part, 22'-44' d'autre part.

Un réseau de ce type entre dans la catégorie des réseaux *biconjugués* de Belevitch [13]. Ils sont équivalents aux aiguillages octopôles utilisant deux transformateurs différentiels, imaginés par Laurent ([3], [4]), mais présentent sur ces derniers les mêmes avantages pratiques que les filtres en échelle ordinaires sur les filtres en treillis ou les filtres différentiels.

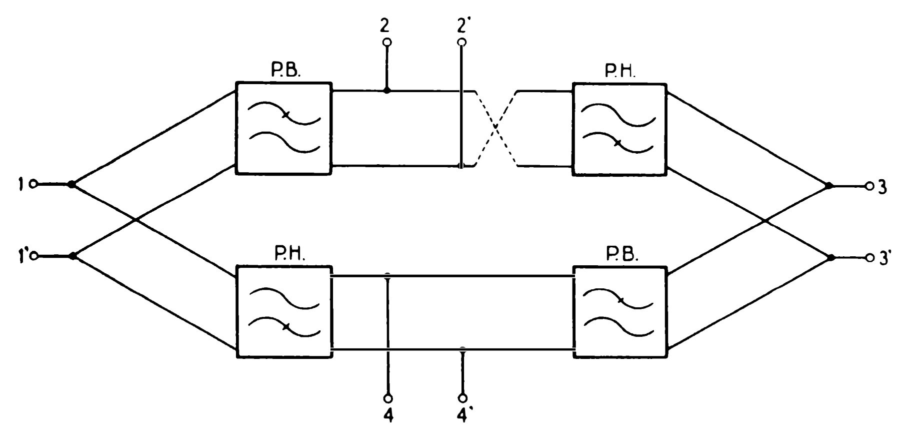


Fig. 13. — *Aiguillage octopôle.*

Examinons en premier lieu la matrice d'admittance de l'octopôle représenté sur la *fig.* 13, les deux passe-bas étant identiques et symétriques, les deux passe-haut identiques et symétriques.

7.2. Matrice d'admittance (ou d'impédance) de l'octopôle.

L'octopôle peut être considéré comme formé de deux hexapôles semblables comportant chacun un filtre passe-bas et un filtre passe-haut (*fig.* 14). Sur un quelconque des quatre filtres, nous introduisons un croisement de connexions, ou si on préfère un transformateur parfait de rapport — 1. Il est clair en effet que, si les quatre accès sont terminés sur des résistances d'utilisation de même valeur et si les deux couples passe-bas-passe-haut sont rigoureusement identiques, une tension appliquée à l'un des accès (11′ par exemple) engendrera des courants qui, après passage dans les deux chemins, auront la même valeur dans l'impédance terminale 33′. Ces courants seront en opposition de phase si on effectue le croisement de connexions sur un des deux chemins. On obtiendra ainsi, comme nous le vérifierons, un affaiblissement infini, à toute fréquence, entre accès opposés.

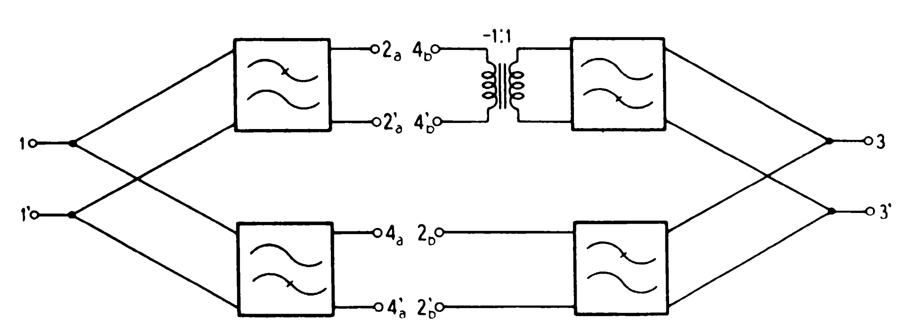


Fig. 14. — *Décomposition de l'octopôle en deux hexapôles.*

Désignons par Y′, Y″ les matrices d'admittance d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut.

Ces matrices s'écrivent, si les filtres sont supposés symétriques :

$$(6.1) \qquad Y' = \begin{Vmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y'_{12} & y'_{11} \end{Vmatrix}, \qquad Y'' = \begin{Vmatrix} y''_{11} & y''_{12} \\ y''_{12} & y''_{11} \end{Vmatrix}$$

La matrice du premier hexapôle de la *fig.* 14 s'écrit, comme on l'a vu au § 3.2 (formule 2.1),

$$(6.2) \qquad Y_a = \begin{Vmatrix} y'_{11} + y''_{11} & y'_{12} & y''_{12} \\ y'_{12} & y'_{11} & 0 \\ y''_{12} & 0 & y''_{11} \end{Vmatrix}$$

Le deuxième hexapôle de la *fig.* 14 a une matrice Y_b semblable, à ceci près que y''_{12} doit être changé en $-y''_{12}$ pour tenir compte du croisement de connexions.

Réunissons maintenant les deux hexapôles partiels pour former l'octopôle, on aura alors, entre courants et tensions, les relations suivantes, avec des notations qui résultent de façon évidente de la numérotation des accès de la *fig.* 14 :

$$(6.3) \qquad \begin{cases} I_2 = I_{2a} + I_{4b} & U_{22} = U_{2a} = U_{4b} \\ I_4 = I_{4a} + I_{2b} & U_4 = U_{4a} = U_{2b} \end{cases}$$

Par ailleurs, entre ces grandeurs existent par définition de Y_a et Y_b les relations que l'on peut écrire sous forme matricielle :

(6.4)
$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_{2a} \\ I_{4a} \end{Vmatrix} = Y_a \begin{Vmatrix} U_1 \\ U_{2a} \\ U_{4a} \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} I_3 \\ I_{2b} \\ I_{4b} \end{Vmatrix} = Y_b \begin{Vmatrix} U_3 \\ U_{2b} \\ U_{4b} \end{Vmatrix}$$

De (6.3) et (6.4) on déduit, par élimination des grandeurs auxiliaires I_{2a}, I_{4a}, I_{2b}, I_{4b}, U_{2a}, U_{2b}, U_{4a}, U_{4b}, la matrice Y de l'octopôle.

Elle prend la forme suivante :

(6.5)
$$Y = \begin{Vmatrix} y'_{11} + y''_{11} & y'_{12} & 0 & y''_{12} \\ y'_{12} & y'_{11} + y''_{11} & -y''_{12} & 0 \\ 0 & -y''_{12} & y'_{11} + y''_{11} & y'_{12} \\ y''_{12} & 0 & y'_{12} & y'_{11} + y''_{11} \end{Vmatrix}$$

La formule (6.5) est une généralisation de la formule (2.1) relative à l'hexapôle. Les quatre zéros du tableau des coefficients sont caractéristiques de la mise en parallèle de quadripôles pour former l'octopôle. L'identité des admittances en court-circuit pour les quatre paires de bornes (diagonale principale) résulte de l'hypothèse de filtres symétriques, deux à deux semblables, et était évidente a priori, tous les accès étant équivalents.

7.3. **Matrice de répartition d'un aiguillage octopôle d'impédance constante.**

Les termes de la matrice (6.5) peuvent être rattachés, comme nous le verrons par la suite, à trois polynômes, exactement comme dans le cas de l'hexapôle. Pour démontrer ce résultat, on peut opérer comme au § 3.3 et exprimer que l'impédance effective est constante pour une quelconque des paires de bornes. Cette condition conduit, comme on peut le vérifier, à la relation :

(6.6)
$$(y'_{11} + y''_{11})^2 = 1 + y'^2_{12} + y''^2_{12}.$$

On obtient aussi la relation (6.6) en exprimant que l'affaiblissement entre accès opposés est infini, à toute fréquence. Il en résulte que les conditions d'adaptation parfaite et d'absence d'interaction entre accès opposés sont équivalentes; en d'autres termes un octopôle ayant la matrice (6.5) ne peut présenter une impédance effective constante si l'affaiblissement entre accès opposés n'est pas infini.

Dans le cas de l'hexapôle, l'étude a été conduite directement à partir des matrices d'admittance, et on en a déduit la matrice de répartition du réseau (cf. Annexe II). On arrive en pratique au résultat d'une façon plus directe en utilisant la matrice de répartition elle-même, et en en déduisant ensuite la matrice d'admittance. C'est la voie que nous allons suivre maintenant.

Considérons l'octopôle de la *fig.* 13, terminé sur quatre résistances égales à R, et désignons par ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, les coefficients de réflexion effectifs aux quatre accès, par τ_{ij} les coefficients de transmission entre bornes d'indices i et j. Les conditions d'adaptation et de non interaction entre accès opposés s'écrivent, en tenant compte de la symétrie du montage et du croisement des connexions :

(6.7)
$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0 \; ; & \tau_{21} = \tau_{12} = \tau_{34} = \tau_{43} \; ; \\ \tau_{13} = \tau_{31} = -\tau_{42} = -\tau_{24} \; ; & \tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{24} = \tau_{42} = 0 \, . \end{cases}$$

Par analogie avec les formules (2.7), ou encore par généralisation de la matrice de répartition de l'hexapôle, donnée à l'annexe II (§ A2.3), nous pouvons poser :

(6.8)
$$\tau_{12} = f/g \, , \qquad \tau_{14} = h/g \, ,$$

où f et h sont des polynômes pairs et impairs de la variable P, et g un polynôme de Hurwitz.

La matrice de répartition Σ de l'octopôle s'écrira ainsi :

(6.9)
$$\Sigma = \begin{Vmatrix} 0 & f/g & 0 & h/g \\ f/g & 0 & -h/g & 0 \\ 0 & -h/g & 0 & f/g \\ h/g & 0 & f/g & 0 \end{Vmatrix}$$

La synthèse n'est possible que si Σ est la matrice de répartition d'un réseau réactif physiquement réalisable. La condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi, f, g, h étant des polynômes, est que Σ soit unitaire :

(6.10)
$$\Sigma \, \Sigma^* = 1 \, ,$$

Σ^* désignant la matrice associée, identique à la conjuguée puisque Σ est symétrique.

La relation (6.10) se réduit à (6.11) où $\overline{f}$ désigne la conjuguée de f :

(6.11) $$f\overline{f} + h\overline{h} = g\overline{g} \; ; \qquad -f\overline{h} + h\overline{f} = 0 \, .$$

En choisissant f pair (τ_{12} étant relatif à un filtre passe-bas), h doit nécessairement être également pair ($h - \overline{h} = 0$). La première relation (6.11) s'écrit alors :

(6.12) $$f^2 + h^2 = g\overline{g} = G^2 - U^2.$$

Elle est identique à celle (2.15) de l'hexapôle (§ 3.3), la fonction d'écho $\varphi = h/f$ étant paire.

Exactement comme pour l'hexapôle, $\varphi = h/f$ caractérise l'affaiblissement effectif d'un des passe-bas, φ^{-1} celle d'un des passe-haut [relation (2.4)].

De la formule (6.9) on peut déduire immédiatement la matrice Y, par un calcul inverse de celui effectué dans l'annexe II. On écrira :

(6.13) $$Y = (1 + S)^{-1}\,(1 - S) = 1 - 2\,(1 + S)^{-1}\,S.$$

En effectuant cette transformation on trouve, G et U désignant la partie paire et la partie impaire de g, liées à f et h par la relation (6.12) :

(6.14) $$Y = \begin{Vmatrix} G/U & -f/U & 0 & -h/U \\ -f/U & G/U & h/U & 0 \\ 0 & h/U & G/U & -f/U \\ -h/U & 0 & -f/U & G/U \end{Vmatrix}$$

Cette matrice s'identifie avec la matrice (6.5) en posant :

(6.15) $$y'_{11} + y''_{11} = G/U \; ; \qquad y'_{12} = -f/U \; ; \qquad y''_{12} = -h/U \, .$$

La matrice (6.14) constitue une généralisation manifeste de celle (2.18) du § 3.3, relative à un aiguillage hexapôle strict ayant une fonction φ *paire*. Elle est d'une forme extrêmement simple et permet de résoudre le problème de synthèse de l'octopôle.

Remarque. — L'expression (6.9) de la matrice de répartition conduit nécessairement à une fonction φ paire. On peut vérifier facilement que si les termes de la deuxième diagonale de (6.9) ont le même signe et sont tous égaux à h/g, la condition de non-dissipation conduit à $f^2 - h^2 = g\overline{g}$ avec φ *impaire*. Un tel réseau est également d'impédance constante et sans interaction entre accès opposés.

Mais il conduit à une matrice d'admittances qui ne peut s'identifier avec la matrice (6.5), aucun terme de cette matrice n'étant nul.

Donc le cas de φ impair *ne correspond pas* à une mise en série ou en parallèle de quadripôles, conformément au schéma de la *fig.* 13; le réseau ne peut être réalisé qu'avec des transformateurs à plusieurs enroulements et nous le laisserons délibérément de côté dans cette étude.

Il est remarquable que l'aiguillage octopôle ne présente pas le même caractère de dualité que l'aiguillage hexapôle étudié aux chapitres précédents.

7.4. **Relations entre les fonctions** f, g, h.

Dans le cas de l'hexapôle, la donnée des polynômes f, g, h liés par la relation (2.15), suffit à déterminer l'aiguillage et la synthèse est toujours possible. Il en va tout autrement dans le cas de l'octopôle et c'est là une singularité assez remarquable. Nous allons montrer que f, g, h doivent être liés par d'autres relations que (6.12) (équivalent à (2.15)) en d'autres termes que la synthèse est impossible si on choisit deux polynômes pairs f et h quelconques.

Considérons en effet un des passe-bas de l'octopôle. Il est caractérisé par sa matrice d'admittance :

(6.16) $$y'_{11}\,, \; y'_{12} = -f/U\,, \qquad y'_{22} = y'_{11}\,.$$

L'impédance effective de l'aiguillage étant constante, les quadripôles composants doivent être *minimum*, car sinon l'admittance effective ne resterait pas finie quelle que soit la fréquence (Annexe I, § A.1.6). Il en résulte que les résidus des pôles de la matrice Y′ du passe-bas satisfont à la relation de couplage serré; si h'_{11}, h'_{12}, h'_{11} désignent les résidus de y'_{11}, y'_{12}, $y'_{22} = y'_{11}$ pour un pôle quelconque, on aura :

(6.17) $$h'^2_{11} - h'^2_{12} = 0\,, \qquad \text{soit :} \quad h'_{11} = h'_{12}$$

(les résidus de y'_{11} étant nécessairement positifs).

Donc, *la donnée de* $y'_{12} = -f/U$ *définit entièrement le passe-bas composant et de même la donnée de* $y''_{12} = -h/U$ *définit entièrement le passe-haut composant.* Cette circonstance provient du fait que les quadripôles sont *symétriques* et *minimum.*

D'autre part, d'après un résultat démontré dans l'annexe III, les pôles de l'admittance (ou de l'impédance) de transfert y'_{12} d'un *filtre symétrique minimum* sont nécessairement situés dans sa bande passante.

Les pôles de $y'_{12} = - f/U$ qui sont aussi pôles de y'_{11} sont donc *séparés* des pôles de $y''_{12} = - h/U$ qui sont aussi pôles de y''_{11}. Or ces pôles étant les zéros du polynôme impair U, la séparation en deux classes distinctes (dans la bande passante du passe-bas pour le passe-bas et dans la bande passante du passe-haut pour le passe-haut) *n'est possible que si* U *divise le polynôme* $f \times h$. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Il est donc clair que si f et h sont choisis arbitrairement, le polynôme de Hurwitz g, qui s'en déduit par la formule (6.12) a une partie impaire U dont les zéros n'ont à priori, aucune raison de coïncider avec certains zéros de f et h. Le choix de f et h paraît donc délicat et la condition que U divise le produit fh restreint considérablement, semble-t-il, les possibilités de synthèse des aiguillages octopôles. Nous allons montrer, au paragraphe suivant, que l'utilisation des fonctions d'affaiblissement classiques (fonctions Q), permet de simplifier considérablement le problème. Ici encore, l'utilisation des fonctions Q apparaît comme un moyen extrêmement commode d'effectuer la synthèse des aiguillages.

7.5. Représentation de la matrice d'admittance à l'aide des fonctions « Q ».

La substitution des fonctions Q complémentaires aux polynômes f, g, h résulte immédiatement de l'analogie entre la matrice (2.18) de l'hexapôle et celle (6.14) de l'octopôle. Nous poserons comme au § 3.5 (cas 2a) :

$$f/U = q_2\sqrt{q_1^2 - 1}\,, \qquad h/U = \sqrt{q_2^2 - 1}\,, \qquad G/U = q_1 q_2$$

q_1 et q_2 étant deux fonctions complémentaires associées.

Dans ces conditions, la matrice Y de l'octopôle, donnée par (6.14), prend la forme :

$$(6.18) \qquad Y = \begin{Vmatrix} q_1 q_2 & -q_2\sqrt{q_1^2-1} & 0 & -\sqrt{q_2^2-1} \\ -q_2\sqrt{q_1^2-1} & q_1 q_2 & \sqrt{q_2^2-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{q_2^2-1} & q_1 q_2 & q_2\sqrt{q_1^2-1} \\ -\sqrt{q_2^2-1} & 0 & -q_2\sqrt{q_1^2-1} & q_1 q_2 \end{Vmatrix}$$

Dans (6.18), q_1 est une fonction de degré pair, q_2 une fonction complémentaire de degré impair. Bien entendu, en échangeant q_1 et q_2 (q_1 de degré impair, q_2 de degré pair) on obtient le cas correspondant au cas (2.a) du § 3.5. Mais, comme nous l'avons vu précédemment, les pôles de y'_{12} et de y''_{12} doivent être séparés, de sorte que q_1 et q_2 ne peuvent être choisis arbitrairement parmi toutes les fonctions complémentaires associées possibles.

Supposons que l'on choisisse une fonction q_2 de degré impair quelconque (pour fixer les idées, q_2 caractérise l'affaiblissement du filtre passe-haut F_2). Le filtre F_2 est entièrement déterminé par $y''_{12} = -\sqrt{q_2^2 - 1}$, donc par la fonction q_2 seule (cf. § 7.4). Les pôles de q_2 sont situés dans la bande passante de F_2, c'est-à-dire dans la bande atténuée du passe-bas F_1.

D'après la remarque faite au paragraphe précédent, les pôles de q_2 ne peuvent donc être pôles de $y'_{12} = - q_2\sqrt{q_1^2 - 1}$. Il en résulte que $q_1^2 - 1$ *doit s'annuler pour les pôles de* q_2. La fonction q_1 doit donc être choisie de telle façon que les pôles de q_2 figurent parmi les racines de $q_1^2 - 1$.

Réciproquement, si q_2 est une fonction de degré impair quelconque, q_1 une fonction complémentaire associée de degré pair, telle que tous les pôles de q_2 soient racines de $q_1^2 - 1$, l'octopôle est réalisable. En effet, la matrice (6.18) est une matrice de réactances. Les pôles de y'_{12} sont les pôles de q_1 situés dans la bande passante de F_1 et les pôles de y''_{12} sont ceux de q_2, situés dans la bande passante de F_2; pour un pôle α de q_1, le résidu de y'_{11} est $[(P^2 + a^2)\,q_1]_{P=j\alpha} \times q_2(\alpha)$ et celui de $y'_{12} = q_2\sqrt{q_1^2 - 1}$ a la même valeur absolue; pour un pôle a de q_2, le résidu de y''_{11} est $[(P^2 + a^2)\,q_2]_{P=ja}$ puisque $q_1(a) = 1$ et celui de y''_{12} a la même valeur absolue. La séparation des pôles de $y_{11} = y'_{11} + y''_{11} = q_1 q_2$ en deux classes, appartenant respectivement au passe-bas F_1 et au passe-haut F_2, est donc réalisée et la condition de couplage serré des résidus de ces pôles est satisfaite. Toutes les conditions de réalisation de l'aiguillage octopôle sont donc remplies et le problème est résolu.

La grande simplification apportée par l'utilisation des fonctions « Q » provient de ce que l'une des impédances de transfert (y''_{12} dans l'exemple choisi) ne dépend que d'une seule fonction q_2, qui peut être choisie arbitrairement parmi toutes les fonctions de degré impair possibles. q_2 étant choisie, la fonction q_1 la plus simple permettant de réaliser un aiguillage s'obtient en choisissant la fonction complémentaire de degré pair prenant la valeur ± 1 pour les pôles de q_2. On peut d'ailleurs se fixer, si nécessaire, d'autres racines de $q_1^2 - 1$ en augmentant le degré de q_1.

La détermination d'une fonction q_1 à l'aide de ses points ± 1 est classique; il suffit de considérer q_1 comme composée de fonctions élémentaires du premier degré, la première q_a prenant la valeur 1 pour le premier pôle a de q_2, la deuxième q_b ayant la valeur 1 pour le deuxième pôle b de q_2, etc... On écrira, d'après la règle de composition ordinaire :

$$(6.19) \qquad \frac{q_1 + 1}{q_1 - 1} = \left(\frac{q_a + 1}{q_a - 1}\right)^2 \cdot \left(\frac{q_b + 1}{q_b - 1}\right)^2 \cdots \left(\frac{q_l + 1}{q_l - 1}\right)^2$$

ce qui définit la *fonction* q_1 *minimum* satisfaisant au problème.

Il importe de remarquer que les pôles a, b,... l de q_2 *ne sont pas des fréquences d'affaiblissement infini du filtre* F_1, quoiqu'ils soient racines de $q_1^2 - 1$; en effet l'admittance de transfert $y'_{12} = - q_2 \sqrt{q_1^2 - 1}$ garde une valeur finie quelconque aux fréquences a, b,... l. Les fréquences d'affaiblissement infini de F_1 sont les zéros de y'_{12}, donc *les zéros de* q_2 et ceux de $q_1^2 - 1$ qui ne coïncident pas avec les pôles de q_2.

L'affaiblissement effectif des filtres F_1 et F_2 dans l'aiguillage se détermine exactement comme dans le cas 2*a*) (ou son homologue 2*b*) de l'hexapôle (§ 3.6). La matrice (6.18) étant tout à fait semblable à la matrice (2.43), l'affaiblissement effectif de F_1 est $A_1 = \frac{1}{2} \log [1 + |\varphi|^2]$ et celui de F_2 est $A_2 = \frac{1}{2} \log [1 + |\varphi|^{-2}]$ avec :

$$(6,20) \qquad \varphi = \frac{h}{f} = \frac{h}{U} : \frac{U}{f} = \frac{\sqrt{q_2^2 - 1}}{q_2} \, \frac{1}{\sqrt{q_1^2 - 1}} ,$$

formule analogue à la formule (2.50).

L'octopôle ayant une impédance constante à toutes ses paires de bornes, l'affaiblissement effectif A_1 coïncide exactement avec l'affaiblissement de courant ou de tension du filtre F_1, ce qui n'est pas le cas pour l'hexapôle car ce dernier n'est pas parfaitement adapté à toutes ses paires de bornes.

7.6. Aiguillage octopôle à coupures distinctes.

Il peut être parfois avantageux, comme dans le cas des aiguillages hexapôles, d'utiliser des filtres à fréquences de coupure distinctes, l'impédance effective restant approximativement constante, sauf dans l'interbande. Théoriquement, une telle disposition est inutile puisque l'octopôle strict a un affaiblissement infini entre accès opposés. Toutefois, cette absence d'interaction n'est pas parfaite car elle repose sur une compensation des courants traversant les deux chemins de l'aiguillage. Il n'est guère possible, en pratique, d'obtenir, avec un aiguillage strict, un affaiblissement, entre accès opposés, dépassant 3 à 4 N au milieu de l'interbande. Le décalage des frontières des deux filtres assure, au prix d'une certaine désadaptation, un affaiblissement beaucoup plus considérable.

On procède exactement comme pour l'hexapôle. Les deux fonctions q_1 et q_2 ne sont plus complémentaires, mais à points de branchement distincts, et on obtient une matrice de réactances en faisant intervenir une fonction auxiliaire q_0 (fonction impédance d'un coupe-bande). On obtient alors, à la place de (6.18) :

$$(6.21) \qquad Y = \left\| \begin{matrix} q_0 q_1 q_2 & - q_0 q_2 \sqrt{q_1^2 - 1} & 0 & - \sqrt{q_2^2 - 1} \\ - q_0 q_2 \sqrt{q_1^2 - 1} & q_0 q_1 q_2 & \sqrt{q_2^2 - 1} & 0 \\ 0 & \sqrt{q_2^2 - 1} & q_0 q_1 q_2 & q_0 q_2 \sqrt{q_1^2 - 1} \\ - \sqrt{q_2^2 - 1} & 0 & - q_0 q_2 \sqrt{q_1^2 - 1} & q_0 q_1 q_2 \end{matrix} \right\|$$

Dans (6.21), la fonction q_1 est une fonction de degré pair ayant un facteur $\sqrt{P^2 + m_0^{-2}}$,
la fonction q_2 est de degré impair, avec le facteur $\sqrt{P^2 + m_0^2}$
et q_0 est par exemple de la forme $(P^2 + 1)/\sqrt{(P^2 + m_0^{-2})(P^2 + m_0^2)}$
(avec les notations du § 4.2).

Comme pour l'octopôle strict, $q_1^2 - 1$ doit s'annuler pour les pôles de q_2. Les résidus des pôles de y'_{11} et de y'_{12} sont tous égaux en module (pôles de q_1), mais ceux de y''_{11} et de y''_{12} ne sont égaux en module que si q_0 est égal à 1 pour les pôles de q_2. Là encore apparaît une différence essentielle avec le cas de l'hexapôle : la fonction q_0 ne peut être choisie arbitrairement parmi les fonctions impédances de coupe-bande, mais se trouve en fait déterminée, comme q_1, à partir de q_2.

On peut remarquer que les zéros de q_0 qui annulent y'_{12} sont des pôles d'affaiblissement du filtre F′, situés au milieu de l'interbande.

7.7. Synthèse des octopôles, exemples élémentaires.

1er *exemple : octopôle strict* (1 ;05). — L'octopôle strict le plus simple possible s'obtient en prenant pour fonction q_2 une fonction du premier degré (qui correspondrait à une *demi-cellule* de filtre passe-haut en échelle) : $q_2 = \sqrt{P^2 + 1}$.

La fonction q_1 associée doit être du deuxième degré et être égale à 1 pour le pôle de q_2, donc pour $P = \infty$. On obtient ainsi :

$$q_1 = \frac{2 P^2 + 1}{2 P \sqrt{P^2 + 1}} , \qquad \sqrt{q_1^2 - 1} = \frac{1}{2 P \sqrt{P^2 + 1}} .$$

Les formules du § 7.5 donnent :

$$\left\{ \begin{aligned} & y'_{11} + y''_{11} = G/U = q_1 q_2 = P + 1/2P , \\ & y'_{12} = - f/U = - q_2 \sqrt{q_1^2 - 1} = - 1/2P , \\ & y''_{12} = - h/U = - \sqrt{q_2^2 - 1} = - P . \end{aligned} \right.$$

On a donc immédiatement (conditions de couplage serré) :

$$y'_{11} = 1/2\,P, \qquad y''_{11} = P.$$

Le schéma de l'octopôle, qui comporte en tout et pour tout deux inductances et deux capacités, est donné par la *fig.* 15.

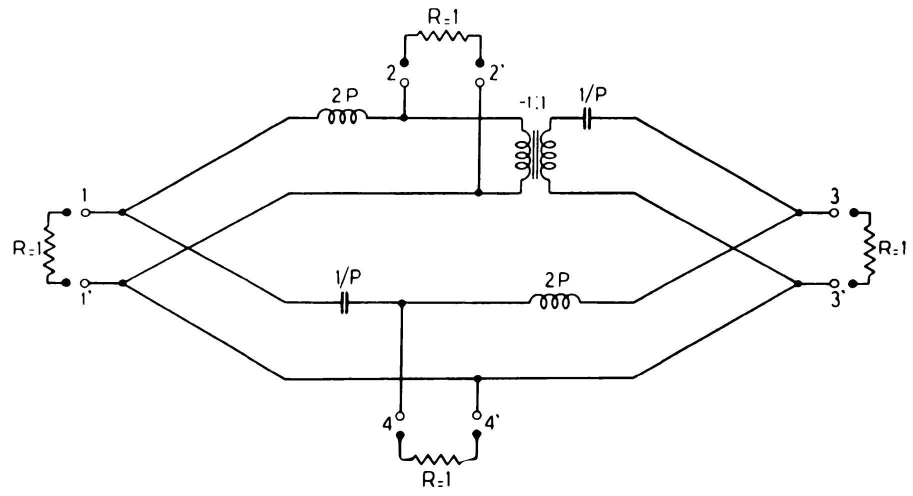


Fig. 15. — *Octopôle (1 : 0,5) d'impédance constante.*

Dans ce cas particulièrement simple, on a :

$$f = 1, \quad h = 2\,P^2, \quad g = G + U = 2\,P^2 + 1 + 2\,P, \quad \varphi = h/f = 2\,P^2$$

(affaiblissement du passe-bas : $\frac{1}{2}\log\,[1 + 4\,\Omega^4]$, du passe-haut : $\frac{1}{2}\log\left[1 + \frac{1}{4\,\Omega^4}\right]$.

2e *exemple : octopôle strict* (2 ; 1,5). — Choisissons comme fonction associée au passe-haut une fonction q_2 du troisième degré (classe 1,5), ce qui correspond à une fréquence d'affaiblissement infini à distance finie (demi-cellule complétée par une cellule entière). La fréquence d'affaiblissement infini aura pour valeur normée Ω''_∞ avec $\Omega''^2_\infty = 1 - m_2^2$, m_2 étant le paramètre usuel. On en déduit :

$$q_2 = \sqrt{P^2+1}\,\frac{P^2 + (1+m_2)^2}{(1+2\,m_2)\,P^2 + (1+m_2)^2}\ ; \qquad \sqrt{q_2^2 - 1} = \frac{P\,[P^2 + 1 - m_2^2]}{(1+2\,m_2)\,P^2 + (1+m_2)^2}.$$

Les pôles de q_2, pour lesquels q_1 doit être égal à 1, mais qui ne sont pas pôles d'affaiblissement du passe-bas, sont Ω'_1 et Ω'_2 avec :

$$\Omega'^2_1 = \frac{(1+m_2)^2}{1+2\,m_2} = \frac{1}{1-m_1^2}\quad\left(m_1 = \frac{m_2}{1+m_2}\right)\ ; \qquad \Omega'^2_2 = \infty\,.$$

La fonction q_1 est composée de fonctions élémentaires de paramètres 1, 1, m_1, m_1. On peut adjoindre d'autres racines à $q_1^2 - 1$, si on désire des fréquences d'affaiblissement infini particulières pour le passe-bas.

La fonction q_1 *minimum* satisfait donc à la relation :

$$\frac{q_1+1}{q_1-1} = \left[\frac{\sqrt{P^2+1}+P}{\sqrt{P^2+1}-P}\right]^2 \times \left[\frac{\sqrt{P^2+1}+m_1\,P}{\sqrt{P^2+1}-m_1\,P}\right]^2$$

on en déduit sans difficulté, puisque $m_1 = m_2/(1 + m_2)$:

$$q_1 = \frac{1}{P\sqrt{P^2+1}}\cdot\frac{2\,(1+2\,m_2)^2\,P^4 + (3 + 10\,m_2 + 8\,m_2^2)\,P^2 + (1+m_2)^2}{2\,(1+2\,m_2)\,[(1+2\,m_2)\,P^2 + 1 + m_2]} \qquad \text{et}$$

$$\sqrt{q_1^2 - 1} = \frac{P^2 + (1+m_2)^2/(1+2\,m_2)}{2\,P\sqrt{P^2+1}\,[(1+2\,m_2)\,P^2 + 1 + m_2]}$$

Les grandeurs caractéristiques de l'octopôle s'en déduisent :

$$\frac{G}{U} = q_1 q_2 = \frac{[P^2 + (1+m_2)^2]\,[2\,(1+2\,m_2)^2\,P^4 + (3 + 10\,m_2 + 8\,m_2^2)\,P^2 + (1+m_2)^2]}{2\,P\,(1+2\,m_2)\,[(1+2\,m_2)\,P^2 + (1+m_2)]\,[(1+2\,m_2)\,P^2 + (1+m_2)^2]}$$

$$y'_{12} = -q_2\sqrt{q_1^2-1} = -\frac{P^2+(1+m_2)^2}{2(1+2m_2)P[(1-2m_2)P^2+(1+m_2)]} ;$$

$$y''_{12} = -\sqrt{q_2^2-1} = -\frac{P[P^2+(1-m_2^2)]}{(1+2m_2)P^2+(1+m_2)^2} .$$

Le filtre passe-bas F′ résulte de la décomposition en éléments simples de y'_{12} :

$$y'_{12} = \frac{H'_1}{P} + \frac{H'_2\,P}{P^2+(1+m_2)/(1+2m_2)} \quad \text{avec} \quad H'_1 = -\frac{(1+m_2)}{2(1+2m_2)},\quad H'_2 = \frac{m_2(3+2m_2)}{2(1+2m_2)^2},$$

Le filtre passe-bas étant symétrique et, dans ce cas particulier, topologiquement symétrique, il est commode d'utiliser le théorème de bissection de Bartlett. (Ce principe de bissection n'est pas toujours applicable car dans certains cas les filtres sont symétriques seulement au point de vue électrique).

L'admittance du passe-bas bissecté est, en court-circuit,

$$(y')_{cc} = 2\frac{[H'_1]}{P} = \frac{1+m_2}{1+2m_2}\cdot\frac{1}{P} \quad \text{et, en circuit ouvert,} \quad (y')_{ou} = \frac{H'_2\,P}{P^2+(1+m_2)/(1+2m_2)}$$

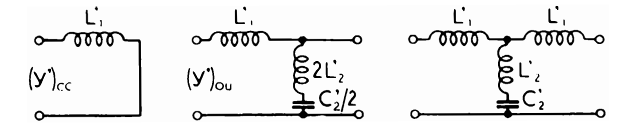


Fig. 16. — *Passe-bas d'un octopôle strict (2 : 1,5).*

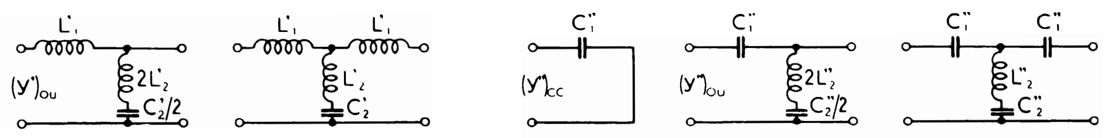


Fig. 17. — *Passe-haut d'un octopôle strict (2 : 1,5).*

Le développement en échelle comporte, comme le montre la *fig.* 16, une inductance série L'_1 et un circuit résonnant shunt $2\,L'_2$, $C'_2/2$ ayant respectivement pour valeur :

$$L'_1\frac{\omega_0}{R} = \frac{1+2m_2}{1+m_2},\qquad L'_2\frac{\omega_0}{R} = \frac{1+2m_2}{2m_2(1+m_2)(3+2m_2)},\qquad C'_2 R\omega_0 = \frac{2m_2(3+2m_2)}{(1+m_2)(1+2m_2)}$$

Le pôle d'affaiblissement infini du passe-bas de l'aiguillage, représenté sur la *fig.* 16, est $\Omega_{\infty 1} = 1 + m_2$: c'est bien le zéro de q_2 comme l'indique la théorie.

On procède de façon analogue pour le passe-haut, en décomposant y''_{12} :

$$y''_{12} = H''_1\,P + H''_2\frac{P}{P^2+(1+m_2)^2/(1+2m_2)} \quad \text{avec} \quad H''_1 = -\frac{1}{1+2m_2},\quad H''_2 = \frac{2m_2^2(1+m_2)}{(1-2m_2)^2}$$

L'admittance du passe-haut bissecté est, en court-circuit,

$$(y'')_{cc} = 2\,|H''_1|\,P = 2\,P/(1+2m_2) \quad \text{et, en circuit ouvert,} \quad (y'')_{ou} = \frac{2\,H''_2\,P}{P^2+(1+m_2)^2/(1+2m_2)}$$

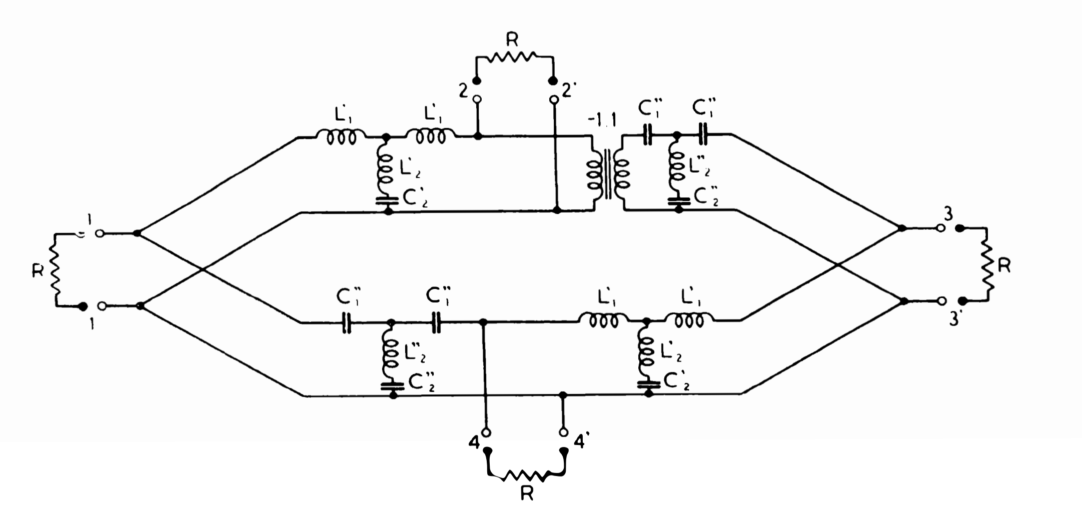


Fig. 18. — *Octopôle strict (2 : 1,5).*

Les éléments du filtre passe-haut, représenté sur la *fig.* 17, sont ainsi :

$$C''_1 R\omega_0 = \frac{2}{1+2m_2},\qquad L''_2\frac{\omega_0}{R} = \frac{(1+2m_2)^2}{8m_2(1+m_2)},\qquad C''_2 R\omega_0 = \frac{8m_2}{(1-m_2)(1+2m_2)^2}.$$

Le pôle d'affaiblissement est évidemment Ω''_∞ tel que $\Omega''^2_\infty = 1 - m_2^2$. La *fig.* 18 représente l'aiguillage octopôle complet.

3e *exemple : Aiguillage octopôle à coupures distinctes.* — En prenant comme fréquence de référence la moyenne géométrique des fréquences de coupure, nous désignerons comme d'habitude par m_0, m_0^{-1} les fréquences de coupure normées.

Prenons pour q_1 la fonction la plus simple du premier degré (classe 0,5) soit :

$$q_1 = \sqrt{P^2 + m_0^{-2}}/P , \qquad \sqrt{q_1^2 - 1} = 1/m_0 P .$$

Nous nous plaçons ainsi dans le cas analogue au cas 2*b* de l'hexapôle ; la fonction q_2 du passe-haut sera de degré pair, et égale à 1 pour le pôle de q_1 (P = 0) on aura donc :

$$q_2 = (P^2 + 2\, m_0^2)/2\, m_0 \sqrt{P^2 + m_0^2} , \qquad \sqrt{q_2^2 - 1} = P^2/2\, m_0 \sqrt{P^2 + m_0^2}$$

En complétant ces deux fonctions par $q_0 = (P^2 + 1)/\sqrt{(P^2 + m_0^{-2})\,(P^2 + m_0^2)}$ qui est égale à l'unité pour le pôle de q_1 (P = 0), on obtient :

$$y'_{12} = \sqrt{q_1^2 - 1} = 1/m_0 P = y'_{11} \qquad \text{(inductance longitudinale)}$$

$$y''_{12} = - q_0 q_1 \sqrt{q_2^2 - 1} = \frac{-P\,(P^2 + 1)}{2 m_0\,(P^2 + m_0^2)} = - \frac{1}{2\, m_0} P + \frac{m_0 - m_0^{-1}}{2} \frac{P}{P^2 + m_0^2} , \qquad \text{d'où :}$$

$$y''_{11} = \frac{P}{2\, m_0} + \frac{m_0 - m_0^{-1}}{2} \cdot \frac{P}{P^2 + m_0^2} .$$

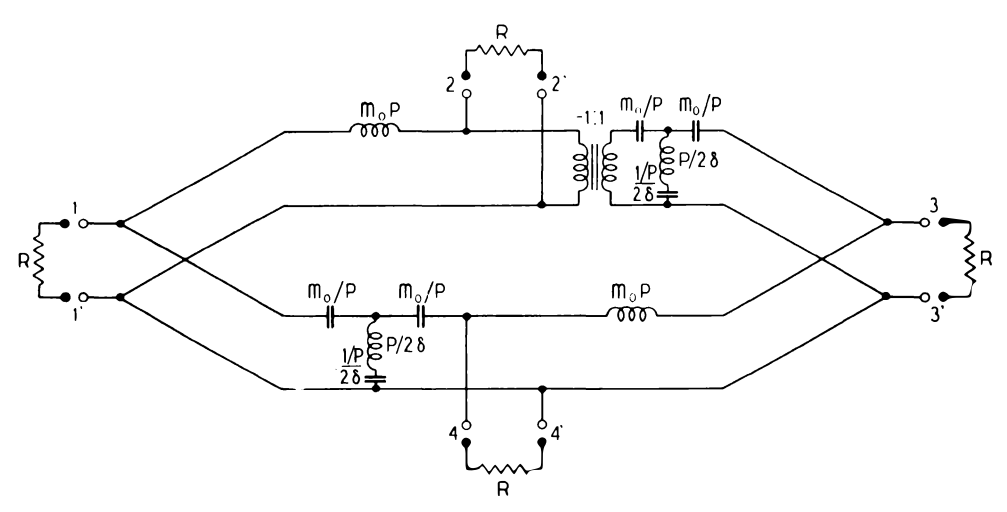


Fig. 19. — *Octopôle (0,5 : 1) à coupures distinctes.*

Le passe-haut peut s'obtenir par bissection :

$$(y'')_{cc} = P/m_0 \; ; \qquad (y'')_{ou} = (m_0 - m_0^{-1})\, P/(P^2 + m_0^2) = \delta\, P/(P^2 + m)_0^2 . \qquad (\delta = m_0 - m_0^{-1}) .$$

On en déduit le schéma complet de l'octopôle à coupures décalées, donné sur la *fig.* 19 ; le circuit shunt du passe-haut résonne à la fréquence centrale $\Omega = 1$, c'est-à-dire au zéro de q_0 qui coïncide avec le milieu de l'interbande, comme l'indique la théorie générale.

VIII. — CONCLUSION.

L'étude qui précède expose essentiellement la théorie des filtres d'aiguillage d'impédance constante, due à Cauer et Piloty. Cette théorie (et diverses généralisations que nous avons introduites, comme celles de la mise en parallèle des filtres de bande et des octopôles stricts) conduit à spécifier l'aiguillage comme un réseau complet à plusieurs paires de bornes, à partir de sa matrice d'impédance ou d'admittance. Nous avons particulièrement insisté sur la méthode, proposée en premier lieu par W. Brandt, qui consiste à utiliser les fonctions d'affaiblissement sur images classiques, à une pulsation de coupure, pour les filtres auxiliaires associés au réseau (filtres qui ne sont pas les *composants* de l'aiguillage lui-même). La méthode de Brandt possède de très nombreux avantages : elle fait apparaître la théorie de l'hexapôle et de l'octopôle comme une généralisation naturelle de celle des filtres ordinaires, elle permet de déterminer immédiatement la matrice d'admittance (sans effectuer de recherche d'un polynôme de Hurwitz auxiliaire), elle permet une généralisation extrêmement utile (hexapôles à coupures distinctes) et elle lève toute difficulté pour la synthèse de l'octopôle (conditions restrictives sur les

polynômes caractéristiques de l'affaiblissement). L'examen approfondi de cette méthode de Brandt nous a permis d'apporter, croyons-nous, de nombreux compléments aux travaux déjà publiés, en particulier à l'exposé fait par Cauer dans son ouvrage.

Les exemples traités dans cet article sont, à dessein, tout à fait élémentaires. Il serait inexact d'en conclure que la méthode exposée ici est inutilisable pour spécifier des aiguillages d'ordre élevé. Quoique les calculs numériques soient laborieux lorsque les fonctions d'affaiblissement présentent de nombreux zéros et pôles, ils n'offrent aucune difficulté réelle et ont pu être mené à bien par des moyens ordinaires (par exemple machine à calculer à 10 décimales).

L'auteur et ses collaborateurs ont pu spécifier, de cette façon, plusieurs hexapôles et octopôles stricts ou à coupures décalées de degré élevé (fonctions d'affaiblissement de degré 12 à 14, correspondant à des filtres de classes 6 ou 7). Les résultats obtenus ont été remarquables, l'affaiblissement de réflexion aux accès de l'aiguillage restant, malgré l'imperfection des éléments, de l'ordre de 3 à 4 népers jusqu'au voisinage immédiat des coupures (coefficient de réflexion compris entre 0,02 et 0,05). La spécification d'un octopôle strict, par cette méthode, s'est révélée particulièrement économique, les résultats obtenus restant par surcroît très supérieurs à ceux donnés par les solutions approchées usuelles.

Les avantages importants procurés par ce procédé de synthèse des aiguillages justifieraient, pensons-nous, une étude approfondie de méthodes pratiques de calcul qui faciliteraient le travail de l'utilisateur.

Remerciements. — L'auteur remercie Mme Querol et M. Rainsard, Ingénieurs à la C. I. T., qui ont participé activement au calcul et à la mise au point des aiguillages réalisés au Laboratoire. Il remercie également M. R. Leroy pour l'aide qu'il lui a apporté dans les développements d'ordre théorique.

ANNEXE I. — THÉORÈME DE CAUER SUR LES QUADRIPOLES DE RÉACTANCES.

Le très important théorème de Cauer sur les quadripôles réactifs constitue la généralisation de la propriété bien connue de décomposition d'un dipôle réactif en éléments simples (circuits résonnants élémentaires). Nous établirons ce théorème à l'aide du lemme classique suivant :

Lemme. — (Z) étant la matrice d'impédance (Z_{11}, Z_{12}, Z_{22}) *d'un quadripôle linéaire passif quelconque* Q, *la forme quadratique*

$$F(p; \lambda, \mu) = \lambda^2 Z_{11}(p) + 2\lambda\mu Z_{12}(p) + \mu^2 Z_{22}(p),$$

où λ, μ *sont des paramètres réels arbitraires* (positifs ou négatifs), *est l'impédance d'un dipôle réalisable par adjonction de deux transformateurs parfaits au quadripôle* Q.

Considérons en effet le dipôle de la *fig.* A1 dont les accès sont les bornes 0, 0'. On a manifestement:

$$E = e_1 + e_2, \quad e_1 = \lambda U_1, \quad I_1 = \lambda I, \quad e_2 = \mu U_2, \quad I_2 = \mu I, \quad \text{d'où :}$$

$$E = e_1 + e_2 = [\lambda^2 Z_{11} + 2\mu\lambda Z_{12} + \mu^2 Z_{22}] I$$

ce qui démontre le lemme.

Or, on sait que l'impédance F (*p*) d'un dipôle est une fonction *positive-réelle*, c'est-à-dire :

a) réelle pour *p* réel,

b) telle que $\mathcal{R}e\,[F(p)] \geqslant 0$ si $\mathcal{R}e\,(p) = \sigma > 0$, $\mathcal{R}e$ désignant la partie réelle.

Donc F (p, λ, μ) est une fonction positive-réelle. On dit alors que la matrice (Z) est positive-réelle.

Si on pose $R_{ij} = \mathcal{R}e\,(Z_{ij})$ la forme quadratique $f(\lambda, \mu) = \lambda^2 R_{11} + 2\mu\lambda R_{12} + \mu^2 R_{22}$ est définie, non négative, donc :

$$R_{11}(p)\, R_{22}(p) - R^2_{12}(p) \geqslant 0 \text{ pour } \mathcal{R}e\,(p) = \sigma > 0.$$

Dans le cas limite où l'expression est nulle, la matrice est dite *semi-positive*.

Un raisonnement identique pourrait être fait sur la matrice d'admittance (Y) du quadripôle. Il en résulte que la matrice (Y) = $(Z)^{-1}$ est également positive-réelle.

AI.1. **Théorème. — La matrice d'impédance (Z) d'un quadripôle de réactances quelconque peut être décomposée en éléments simples sous la forme :**

$$Z = p^{-1} H^{(o)} + \sum_1^m \frac{p}{p^2 + \omega_k^2} H^{(k)} + p H^{(\infty)}$$

avec : $H^{(o)} = \begin{Vmatrix} h_{11}^{(o)} & h_{12}^{(o)} \\ h_{12}^{(o)} & h_{22}^{(o)} \end{Vmatrix}$, $H^{(k)} = \begin{Vmatrix} h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} \\ h_{12}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \end{Vmatrix}$, $H^{(\infty)} = \begin{Vmatrix} h_{11}^{(\infty)} & h_{12}^{(\infty)} \\ h_{12}^{(\infty)} & h_{22}^{(\infty)} \end{Vmatrix}$.

où $h_{11}^{(k)}$, $h_{12}^{(k)}$, $h_{22}^{(k)}$, *résidus de* Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} *pour les pôles* $p^2 = -\omega_k^2$, *satisfont aux inégalités suivantes :*

$$\omega_k > 0, \quad h_{11}^{(k)} \geqslant 0, \quad h_{22}^{(k)} \geqslant 0, \quad h_{11}^{(k)} h_{22}^{(k)} - [h_{12}^{(k)}]^2 \geqslant 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots m; \infty).$$

Une réactance quelconque Z peut être en effet décomposée en éléments simples :

$$Z = h^{(o)} p^{-1} + \Sigma h^{(k)} \frac{p}{p^2 + \omega_k^2} + h^{(\infty)} p \, .$$

les $h^{(k)}$ et ω_k étant réels, *positifs* ou *nuls*. Les pôles sont simples, imaginaires conjugués, à résidus positifs.

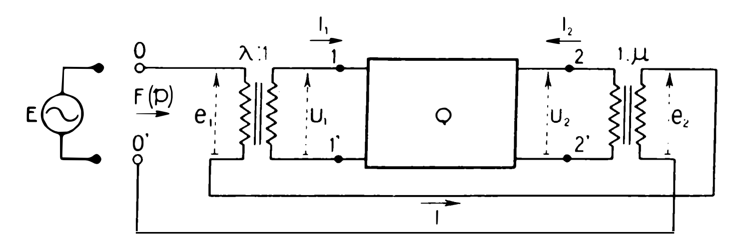


Fig. A1. — *Réalisation du dipôle* $F(p; \lambda, \mu) = \lambda^2 Z_{21}(p) + 2\lambda\mu Z_{12}(p) + \mu^2 Z_{22}(p)$.

Donc Z_{11}, Z_{22} qui sont des réactances sont susceptibles d'un développement de ce genre. D'autre part, d'après le lemme $F(p) = \lambda^2 Z_{11} + 2\lambda\mu Z_{12} + \mu^2 Z_{22}$, est l'impédance d'un dipôle et même une réactance d'après la *fig.* A.1 si le quadripôle est réactif. Par conséquent, puisque Z_{11} (ou $\lambda^2 Z_{11}$), Z_{22} (ou $\mu^2 Z_{22}$) et $F(p)$ peuvent être décomposés en éléments simples, il en est de même de :

$2\lambda\mu Z_{12} = F(p) - \lambda^2 Z_{11} - \mu^2 Z_{22}$. On pourra donc écrire formellement :

$$F(p) = (h_{11}^{(o)}\lambda^2 + 2\lambda\mu h_{12}^{(o)} + h_{22}^{(o)}\mu^2)\, p^{-1} + p\,\Sigma \frac{h_{11}^{(k)}\lambda^2 + 2\lambda\mu h_{12}^{(k)} + \mu^2 h_{22}^{(k)}}{p^2 + \omega_k^2} + [h_{11}^{(\infty)}\lambda^2 + 2\lambda\mu h_{12}^{(\infty)} + h_{22}^{(\infty)}\mu^2]\, p$$

$F(p)$ est une réactance, quels que soient les paramètres λ, μ réels.

Donc les formes quadratiques $h_{11}^{(k)}\lambda^2 + 2\lambda\mu h_{12}^{(k)} + \mu^2 h_{22}^{(k)}$ sont définies non négatives. On en déduit immédiatement les relations d'inégalité

$$\omega_k \geqslant 0 \, , \quad h_{11}^{(k)} \geqslant 0 \, , \quad h_{22}^{(k)} \geqslant 0 \, , \quad h_{11}^{(k)} h_{22}^{(k)} - [h_{12}^{(k)}]^2 \geqslant 0 \, .$$

La « réactance de transfert » Z_{12} ne se distingue des réactances Z_{11}, Z_{22} que par la condition des résidus $h_{12}^{(k)}$ qui ne sont pas nécessairement positifs.

AI.2. **Premières conséquences du théorème de Cauer.**

1° La condition $h_{11}^{(k)} h_{22}^{(k)} - [h_{12}^{(k)}]^2 \geqslant 0$ montre que :

a) si un pôle de Z_{11} n'est pas pôle de Z_{22}, il n'est pas pôle de Z_{12} ;

b) tout pôle de Z_{12} est nécessairement pôle de Z_{11} et de Z_{22}.

Cette dernière propriété est utilisée au § 2.2.

2° La décomposition de (Z) en éléments simples montre de façon évidente que $M = (1 + z_{22})/z_{12}$ a pour dénominateur un polynôme pair ou impair : en effet le dénominateur de z_{22} et le numérateur de z_{12} sont eux-mêmes pairs ou impairs (remarque utilisée au § 2.2).

3° Considérons l'impédance effective d'entrée $w_{e1} = z_{11} - z_{12}^2/(1 + z_{22})$ d'un quadripôle de réactances. Les pôles de z_{12} sont nécessairement pôles de z_{11} et de z_{22} ; soit ω_k un tel pôle ; la partie principale de w_e en ω_k est :

$$w_e \simeq h_{11}^{(k)} \frac{p}{p^2 + \omega_k^2} - \frac{[h_{12}^{(k)}]^2}{h_{22}^{(k)}} \frac{p}{p^2 + \omega_k^2} = \left[h_{11}^{(k)} - \frac{[h_{12}^{(k)}]^2}{h_{22}^{(k)}} \right] \frac{p}{p^2 + \omega_k^2} \, .$$

Le résidu de w_e pour un tel pôle est donc positif. Si ω_k est pôle de z_{11} seulement, son résidu est $h_{11}^{(k)}$ également positif. Il est d'ailleurs clair que si le résidu d'un pôle n'était pas positif, l'impédance effective d'entrée w_e ne pourrait être une fonction positive-réelle. Cette propriété est utilisée au § 3.2.

AI.3. **Cas des matrices semi-positives.**

Considérons la forme quadratique associée aux parties réelles des Z_{ij} :

$$f(\lambda, \mu) = \lambda^2 R_{11} + 2\lambda\mu R_{12} + \mu^2 R_{22}$$

et supposons que pour un système *donné* de valeurs (λ_0, μ_0), non nulles simultanément, $f(\lambda_0, \mu_0, p)$ s'annule pour un point $p = p_0$ situé dans le demi-plan de droite.

La fonction analytique $F(\lambda_0, \mu_0, p) = Z_{11}\lambda_0^2 + 2 Z_{12}\lambda_0\mu_0 + Z_{22}\mu_0^2$ a une partie réelle non négative dans le demi-plan de droite; d'après un théorème d'analyse classique, le minimum de la partie réelle de F ne peut être situé que sur la frontière, ou alors F se réduit à une constante. Donc F se réduit à une constante, qui est nulle puisque sur l'axe réel :

$$F \equiv \mathcal{R}e\,(F) \equiv 0 \text{ (la fonction F étant positive-réelle)}$$

on en déduit :

$$F(\lambda_0, \mu_0, p) = \lambda_0^2 Z_{11} [\mu_0/\lambda_0 + Z_{12}/Z_{22}]^2 \equiv 0 \qquad Z_{12}/Z_{22} = Z_{11}/Z_{12} = -\mu_0/\lambda_0 = \text{Cte} .$$

Une matrice semi-positive a donc une impédance caractéristique nulle :

$$Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2 = 0 .$$

et les rapports Z_{12}/Z_{22} et Z_{11}/Z_{12} sont égaux et constants, à toute fréquence.

AI.4. **Réalisation des matrices semi-positives.**

Supposons qu'aucun des termes Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} de la matrice semi-positive ne soit identiquement nul. On peut écrire :

$$Z = Z_{11} \begin{Vmatrix} 1 & Z_{12}/Z_{11} \\ Z_{12}/Z_{11} & Z_{22}/Z_{11} \end{Vmatrix} = Z_{11} \begin{Vmatrix} 1 & n \\ n & n^2 \end{Vmatrix} \quad n \text{ étant une constante.}$$

Le quadripôle est réalisé au moyen de l'impédance Z_{11} et d'un transformateur parfait de rapport $Z_{11} : Z_{12} = 1/n$ (*fig.* A2).

Supposons maintenant que Z_{22} soit identiquement nul; alors Z_{12} l'est également.

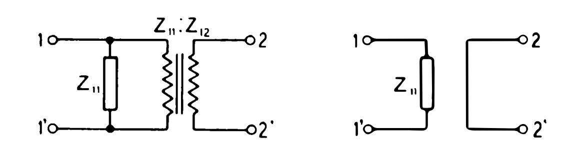


Fig. A2 ($Z_{22} \neq 0$) et Fig. A3 ($Z_{22} \equiv 0$).
Réalisation d'une matrice (Z) semi-positive.

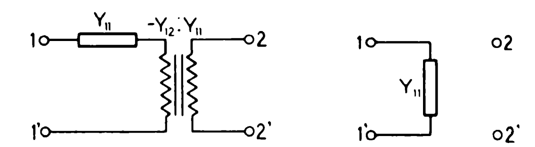


Fig. A4 ($Y_{22} \neq 0$) et Fig. A5 ($Y_{22} \equiv 0$).
Réalisation d'une matrice (Y) semi-positive.

La matrice devient :

$$Z = Z_{11} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Elle est réalisable par le quadripôle de la *fig.* A3.

S'il s'agit d'une matrice d'admittance (Y) semi-positive on obtient les quadripôles des *fig.* A4 *et* A5.

AI.5. **Réciproque du théorème de Cauer et réalisation des quadripôles réactifs de matrice Z donnée.**

Toute matrice $Z = H^{(0)} p^{-1} + \sum_{1}^{m} \frac{p}{p^2 + \omega_k^2} H^{(k)} + H^{(\infty)} p$, dont les matrices de résidus $H^{(k)} = \begin{Vmatrix} h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} \\ h_{12}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \end{Vmatrix}$ satisfont aux relations $h_{11}^{(k)} \geqslant 0$, $h_{22}^{(k)} \geqslant 0$, $h_{11}^{(k)} h_{22}^{(k)} - [h_{12}^{(k)}]^2 \geqslant 0$, est la matrice d'impédance d'un quadripôle réactif réalisable.

En effet, une matrice partielle (z_k) peut s'écrire, en appelant z_k une impédance $p/(p^2 + \omega_k^2)$ (où éventuellement $\omega_k = 0$ ou encore $\omega_k = \infty$) :

$$(z_k) = z_k \begin{Vmatrix} h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} \\ h_{12}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \end{Vmatrix} = z_k \begin{Vmatrix} \dfrac{h_{11}^{(k)} h_{22}^{(k)} - [h_{12}^{(k)}]^2}{h_{22}^{(k)}} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + z_k \begin{Vmatrix} \dfrac{[h_{12}^{(k)}]^2}{h_{22}^{(k)}} & h_{12}^{(k)} \\ h_{12}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \end{Vmatrix} .$$

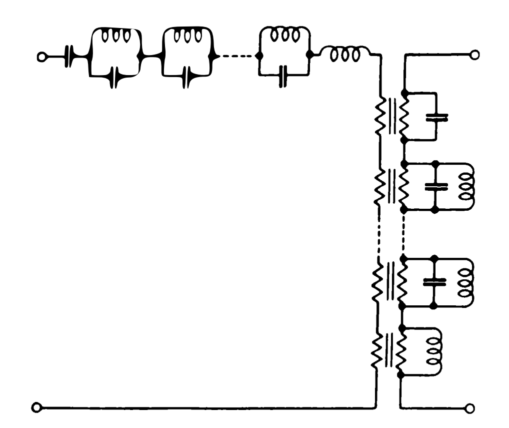
Les deux matrices dont la somme est (z_k) sont semi-positives et réalisables par les schémas des *fig.* A4 *et* 3.

Si $h_{22}^{(k)} = 0$, nécessairement $h_{12}^{(k)} = 0$ et (z_k) se réduit à $z_k \begin{Vmatrix} h_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, encore réalisable par le schéma de la *fig.* A3.

Les matrices partielles, convenablement décomposées en matrices semi-positives, sont réalisables; la matrice (Z) somme des matrices partielles, s'obtient par mise en série des quadripôles composants élémentaires.

Les *fig.* A6 *et* A7 montrent les schémas généraux auxquels conduit la méthode de décomposition de Cauer. Le mode de réalisation par décomposition en éléments simples de la matrice d'admittance ou d'impédance introduit des transformateurs parfaits. On évite en général ces transformateurs en réalisant un quadripôle réactif équivalent sous forme de réseau en échelle.

Toutefois, l'intérêt théorique des schémas de Cauer est évident, et il ne faut pas oublier que la réalisation des treillis symétriques par un montage différentiel n'est rien d'autre qu'un cas particulier



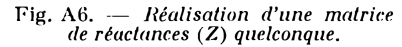


Fig. A6. — *Réalisation d'une matrice de réactances (Z) quelconque.*

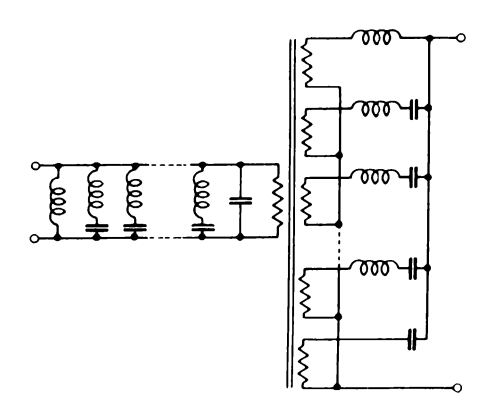


Fig. A7. — *Réalisation d'une matrice de réactances (Y) quelconque.*

de décomposition de la matrice (Y); si le quadripôle est symétrique, les transformateurs élémentaires ont le même rapport et peuvent être confondus en un transformateur unique à point milieu.

AI.6. **Quadripôle « minimum » de rapport de transfert de courant ou de tension donné.**

Considérons le rapport de transfert de courants d'un quadripôle réactif :

$$M = e^{\Gamma m} = I_1/-I_2 = (1 + z_{22})/z_{12} \tag{1.3}$$

Ce rapport ne dépend pas de z_{11}. Supposons donnés z_{22}, z_{12}, donc M et cherchons les quadripôles ayant M pour rapport de transfert de courants. Ces quadripôles ont pour impédance effective :

$$w_e = z_{11} - z_{12}^2/(1 + z_{22})$$

Il suffit que z_{11} ait les pôles de z_{12} (donc de z_{22}) le résidu du pôle correspondant de w_e étant positif ou nul pour que le quadripôle soit réalisable; de plus z_{11} peut posséder des pôles (à résidus positifs) distincts de ceux de z_{12} et de z_{22}. Or, nous avons vu que le résidu d'un pôle de w_e qui est pôle commun de z_{11}, z_{22}, z_{12} est : $h_{11}^{(k)} - [h_{12}^{(k)}]^2/h_{22}^{(k)}$.

Donc, l'expression générale de z_{11} est, en désignant par z une réactance arbitraire, ayant des pôles distincts de ceux (ω_1, ω_2,....., ω_m) de z_{12} :

$$z_{11} = z + \sum_1^m \frac{h_{11}^{(k)}\, p}{p^2 + \omega_k^2} = z + \sum_1^m \frac{\left[h_{11}^{(k)} - \frac{[h_{12}^{(k)}]^2}{h_{22}^{(k)}}\right] p}{p^2 + \omega_k^2} + \sum_1^m \frac{[h_{12}^{(k)}]^2}{h_{22}^{(k)}} \frac{p}{p^2 + \omega_k^2}.$$

Dans le cas où la réactance $z' = z + \sum_1^m \left(h_{11}^{(k)} - \frac{[h_{12}^{(k)}]^2}{h_{22}}\right) \frac{p}{p^2 + \omega_k^2}$ est identiquement nulle, c'est-à-dire pour :

$$z \equiv 0 \quad \text{et} \quad h_{11}^{(k)}\, h_{22}^{(k)} - h_{12}^{(k)2} = 0$$

(condition de *couplage serré*), on obtient un quadripôle dont l'impédance effective w_e reste *finie* à toute fréquence, puisque les résidus de z_{11} et de $z_{12}^2/(1 + z_{22})$ s'éliminent. Ce quadripôle est le *quadripôle minimum cherché*.

En effet, tous les autres quadripôles ayant les mêmes z_{12} et z_{22} ont pour z_{11} : $(z_{11})_{\min} + z'$, z' étant une réactance arbitraire : ils s'obtiennent par mise en série d'une réactance arbitraire avec le quadripôle minimum.

Ce qui précède justifie les développements des § 2.2 et 3.2.

AI.7. **Réalisation d'une matrice d'hexapôle de terme diagonal $x_{12} = x_{21}$ identiquement nul par mise en parallèle ou en série de deux quadripôles** (§ 3.2).

Soit une matrice de réactances $X = \begin{Vmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{01} & x_{11} & 0 \\ x_{02} & 0 & x_{22} \end{Vmatrix}$

où les x_{ii} sont des réactances, les x_{ij} des réactances de transfert. La décomposition d'une matrice de quadripôles en éléments simples peut évidemment se généraliser pour les $2n$ pôles. On écrira :

$$X = p^{-1} H^{(o)} + \Sigma \frac{p}{p^2 + \omega_k^2} H^{(k)} + p H^{(\infty)}$$

avec :

$$H^{(k)} = \begin{Vmatrix} h_{00}^{(k)} & h_{01}^{(k)} & h_{02}^{(k)} \\ h_{01}^{(k)} & h_{11}^{(k)} & 0 \\ h_{02}^{(k)} & 0 & h_{22}^{(k)} \end{Vmatrix}$$

et les formes quadratiques ternaires du type

$$F(\lambda, \mu, \nu) = h_{00}\lambda^2 + 2\lambda\mu h_{01} + \mu^2 h_{11} + 2\lambda\nu h_{02} + \nu^2 h_{22}.$$

sont définies, non négatives (l'indice k a été omis pour simplifier l'écriture). Il suffit de montrer qu'une telle forme peut se décomposer en deux formes binaires :

$$\begin{cases} F_1(\lambda, \mu) = h'_{00}\lambda^2 + 2\lambda\mu h_{01} + \mu^2 h_{11} \\ F_2(\lambda, \nu) = h''_{00}\lambda^2 + 2\lambda\nu h_{02} + \nu^2 h_{22} \end{cases} \quad (h_{00} = h'_{00} + h''_{00})$$

définies, non négatives, pour que la décomposition en deux quadripôles soit évidente. Si $h_{11} = 0$, nécessairement $h_{01} = 0$, $F_1 \equiv 0$ et $h_{00} = h''_{00}$. Ce cas étant exclu choisissons : $h'_{00} = h_{01}^2/h_{11}$. Alors : $F_1 = \lambda(\lambda h'_{00} + \mu h_{01}) + \mu(\lambda h_{01} + \mu h_{11})$ devient identiquement nulle pour $\mu/\lambda = -h_{01}/h_{11}$. Pour cette valeur particulière de μ/λ, $F_2(\lambda, \nu)$ se réduit à F qui est définie, non négative, par hypothèse. On peut donc décomposer F en une forme correspondant à une matrice de quadripôle semi-positive et une forme correspondant à une matrice de quadripôle positive, ce qui établit le théorème.

ANNEXE II. — MATRICE DE RÉPARTITION DES AIGUILLAGES STRICTS.

Rappelons tout d'abord brièvement la définition de la matrice de répartition d'un quadripôle (qui se généralise d'ailleurs facilement pour un $2n$ pôles).

Soit un quadripôle quelconque dont les courants entrant aux deux paires de bornes sont désignés par I_1 et I_2, les tensions appliquées étant U_1 et U_2; U_1, U_2, I_1, I_2 sont reliés par deux équations linéaires qui peuvent prendre diverses formes, en conduisant ainsi aux matrices de chaîne, d'impédance, d'admittance, etc.

En prenant pour unité une résistance quelconque de référence (ce qui permet de supposer que les courants et tensions ont la même dimension), effectuons la transformation :

$$\begin{cases} a_1 = (U_1 + I_1)/2 & a_2 = (U_2 + I_2)/2 \\ b_1 = (U_1 - I_1)/2 & b_2 = (U_2 - I_2)/2 \end{cases}$$

a_1, a_2 sont les *ondes incidentes*, b_1 et b_2 les *ondes réfléchies*.

Appelons a la matrice unicolonne $\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Vmatrix}$, b la matrice unicolonne $\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Vmatrix}$ et de même I, U les matrices $\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Vmatrix}$.

On a sans difficulté, Z étant la matrice d'impédance du quadripôle :

$$a = (Z + 1) I/2 \quad ; \quad b = (Z - 1) I/2$$

d'où : $I/2 = (Z + 1)^{-1} a$ et $b = \Sigma a$, avec $\Sigma = (Z - 1)(Z + 1)^{-1}$,

Σ est la matrice qui associe les ondes réfléchies aux ondes incidentes. On l'appelle *matrice de répartition de l'énergie.* La matrice Σ est liée directement aux matrices d'admittances et d'impédances :

$$\Sigma = (Z - 1)(Z + 1)^{-1} = (1 - Y)(1 + Y)^{-1}.$$

Si w_{e1}, désigne l'impédance effective d'entrée du quadripôle vue des bornes 11′ (les bornes 22′ étant bouclées sur la résistance unité), le coefficient Σ_{11} de la matrice vaut $\frac{w_{e1} - 1}{w_{e1} + 1} = \rho_1$ coefficient complexe de réflexion; de même $\Sigma_{22} = \rho_2 = \frac{w_{e2} - 1}{w_{e2} + 1}$. Enfin le terme Σ_{12} n'est rien d'autre que $e^{-\Gamma}$, Γ étant l'exposant effectif (composite) de transfert. La matrice prend la forme très symétrique :

$$\Sigma = (Z - 1)(Z + 1)^{-1} = \begin{Vmatrix} e^{-\Gamma r_1} & e^{-\Gamma} \\ e^{-\Gamma} & e^{-\Gamma r_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \rho_1 & \tau \\ \tau & \rho_2 \end{Vmatrix}.$$

Elle caractérise le passage de l'énergie à travers le quadripôle : τ est le coefficient de transmission, égal à 1 si le quadripôle est « transparent » ; ρ_1, ρ_2 les coefficients de réflexion, égaux à 1 si le quadripôle réfléchit toute l'énergie incidente et nuls si le quadripôle est parfaitement adapté. Ceci justifie le nom de *matrice de répartition* donné à Σ.

A2.1. **Propriétés de la matrice de répartition Σ.**

1° Si on change w_{e1} en $1/w_{e1}$ (passage d'un quadripôle donné au quadripôle inverse) le coefficient de réflexion ρ_1 change de signe. De même le changement de signe de w_e correspond au passage de ρ à $1/\rho$.

2° Pour tout quadripôle passif, on a : $(1 - \Sigma\Sigma^*) > 0$, où Σ^* est la matrice associée à Σ[3]. En d'autres termes, l'énergie transmise ne peut être supérieure à l'énergie incidente, ce qui peut s'écrire :

$$|\rho_1|^2 + |\tau|^2 \leqslant 1 , \qquad |\rho_2|^2 + |\tau|^2 \leqslant 1 .$$

3° *La matrice de répartition d'un quadripôle de réactances est unitaire.* — Physiquement, l'énergie totale appliquée est soit réfléchie, soit transmise sans aucune dissipation dans le quadripôle, d'où :

$$|\rho_1|^2 + |\tau|^2 = |\rho_2|^2 + |\tau|^2 = 1 .$$

En posant $\begin{cases} \Gamma = A + j\,B \text{ (A affaiblissement effectif, B déphasage effectif)} \\ \Gamma_{r1} = A_r + j\,B_{r1} \text{ et } \Gamma_{r2} = A_r + j\,B_{r2} \text{ (}A_r\text{ affaiblissement de réflexion à gauche ou à droite),} \end{cases}$

il vient $e^{-2A} + e^{-2A_r} = 1$, relation déjà établie d'une autre façon au § 2.1 (formule 1.8) et d'autre part :

$$2\,B - (B_{r1} + B_{r2}) = \pi + 2\,n\,\pi , \qquad n : \text{entier arbitraire.}$$

Mathématiquement, la matrice d'impédance Z est une matrice de réactances, dont tous les éléments sont imaginaires purs; Σ s'obtient, à partir de Z, par la transformation de Cayley : $\Sigma = (Z - 1)(Z + 1)^{-1}$ qui transforme tous les points de l'axe imaginaire en points situés sur le cercle unité. La matrice est donc évidemment unitaire.

A2.2. **Application aux filtres symétriques et antimétriques.**

Filtres symétriques. — On a évidemment : $\rho_1 = \rho_2$, donc $B_{r1} = B_{r2} = B_r$ et $B - B_r = \dfrac{\pi}{2} + n\,\pi$. En faisant intervenir les polynômes f, g, h du § 1.3, il vient :

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} e^{-\Gamma r} & e^{-\Gamma} \\ e^{-\Gamma} & e^{-\Gamma r} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \rho & \tau \\ \tau & \rho \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h/g & f/g \\ f/g & h/g \end{Vmatrix} .$$

Filtres antimétriques. — Les impédances effectives étant opposées, aux deux paires de bornes, on a :

$$\rho_1 = -\rho_2 , \qquad B_{r2} = B_{r1} \pm \pi , \qquad B - B_r = 0 + n\,\pi ,$$

d'où l'on déduit :

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} e^{-\Gamma r1} & e^{-\Gamma} \\ e^{-\Gamma} & -e^{-\Gamma r1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \rho_1 & \tau \\ \tau & -\rho_1 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} h/g & f/g \\ f/g & -h/g \end{Vmatrix} ,$$

A2.3. **Généralisation : aiguillages d'impédance constante.**

La matrice de répartition d'un aiguillage d'impédance constante ou plus généralement d'un hexapôle quelconque s'obtient au moyen de la formule :

$$\Sigma = (Z - 1)\,(Z + 1)^{-1} = (1 - Y)\,(1 + Y)^{-1}$$

où Z, Y sont les matrices du troisième ordre. Si on effectue le calcul sur la matrice (2.13) du § 3.3, on obtient, pour φ impair :

$$\Sigma = (Z - 1)\,(Z + 1)^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \pm f/g & \pm h/g \\ \pm f/g & \mp h^2/g^2 & \mp fh/g^2 \\ \pm h/g & \mp fh/g^2 & \mp f^2/g^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & e^{-\Gamma_1} & e^{-\Gamma_2} \\ e^{-\Gamma_1} & \mp e^{-2\Gamma_2} & \mp e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} \\ e^{-\Gamma_2} & \mp e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} & \mp e^{-2\Gamma_1} \end{Vmatrix}$$

où le signe supérieur est valable pour une mise en série, le signe inférieur pour une mise en parallèle de deux quadripôles. Le premier terme diagonal est identiquement nul, puisque l'impédance est constante aux bornes communes. Les autres termes diagonaux, donnent les coefficients de réflexion aux bornes 11′, 22′; ces coefficients sont liés directement à l'exposant effectif de transfert des deux filtres. Enfin, l'exposant de transfert effectif entre les bornes 11′ et 22′ est la somme des exposants de transfert effectifs des deux filtres.

Un calcul identique, effectué sur la matrice (2.18) (φ pair) donne :

$$\Sigma = (Z - 1)\,(Z + 1)^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \pm f/g & \pm h/g \\ \pm f/g & \pm h^2/g^2 & \mp fh/g^2 \\ \pm h/g & \mp fh/g^2 & \pm f^2/g^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & e^{-\Gamma_1} & e^{-\Gamma_2} \\ e^{-\Gamma_1} & \pm e^{-2\Gamma_2} & \mp e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} \\ e^{-\Gamma_2} & \mp e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)} & \pm e^{-2\Gamma_1} \end{Vmatrix}$$

---

3) Identique à la matrice conjuguée, à cause de la symétrie par rapport à la diagonale principale.

le signe supérieur étant valable pour une mise en série, le signe inférieur pour une mise en parallèle. Les conclusions sont identiques.

Remarque. — Un raisonnement direct permet de vérifier facilement que l'exposant effectif de transfert entre 11′ et 22′ est égal à $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Appliquons en effet une force électromotrice E aux bornes 11′ (*fig.* A8). La tension U_0 en 00′ est, par définition de Γ_1 et d'après les formules (2.3) et (2.4) du § 2.2 : $U_0 = E/2\, e^{-\Gamma_1}$.

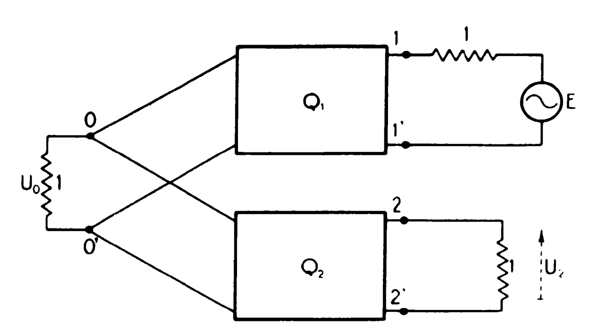


Fig. A8. — *Exposant effectif de transfert* Γ_{12}.

D'autre part, le rapport de transfert des tensions pour le quadripôle Q_2 est égal à Γ_2, donc $U_2 = U_0\, e^{-\Gamma_2}$. On en déduit : $U_2 = E/2\, e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)}$ ce qui démontre la proposition.

La matrice de répartition d'un aiguillage strict, dont la forme est remarquablement simple, permet d'étudier par exemple l'impédance d'entrée, aux bornes 00′, d'un aiguillage strict dont les bornes 11′, 22′ sont terminées sur leur propre impédance effective et non plus sur la résistance unité.

En désignant par $\rho_1 = \pm e^{-2\Gamma_2}$, $\rho_2 = \pm e^{-2\Gamma_1}$ les coefficients de réflexion effectifs aux bornes non communes, on a, aux bornes communes :

$$\rho_0 = \rho_1 \rho_2 [2 - (\rho_2 - \rho_1)^2]/(1 - \rho_1^2 - \rho_2^2)$$

qui reste très petit, car dans la bande du passe-bas par exemple, $\rho_1 = e^{-2\Gamma_2}$ est très faible en module, tandis que ρ_2 reste voisin de l'unité en module, avec un déphasage variant de façon monotone en fonction de la fréquence. Dans ce cas, d'ailleurs anormal, d'utilisation d'un aiguillage strict, l'adaptation sera, aux bornes communes, du même ordre de grandeur que celle, excellente en général, obtenue aux bornes non communes.

ANNEXE III. — POLES DE L'ADMITTANCE ET DE L'IMPÉDANCE DE TRANSFERT D'UN FILTRE SYMÉTRIQUE « MINIMUM ».

Théorème : Les pôles de l'admittance de transfert (et de l'impédance de transfert) d'un filtre symétrique minimum sont situés dans sa bande passante.

Soit F′ un filtre *minimum*, défini par la matrice y'_{11}, y'_{12}, y'_{22}. D'après la formule (1.4), le rapport de transfert des tensions a pour valeur

$$N' = e^{\Gamma' n} = (1 + y_{22})/- y_{12}.$$

Un pôle de y_{12} est aussi pôle de y_{11} et de y_{22}, les résidus satisfaisant à la relation de couplage serré $h_{11}\, h_{22} - h_{12}^2 = 0$.

Pour le pôle considéré, N′ prend la valeur :

$$N'_0 = e^{\Gamma' n0} = \frac{h_{22}}{-\sqrt{h_{11}\, h_{22}}} = \sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}.$$

Si le filtre est *symétrique*, $h_{11} = h_2$, donc $|N'_0| = |e^{\Gamma' n0}| = 1$.

L'affaiblissement de tension est donc *nul* dans ces conditions.

D'après la formule (1.9), la partie réelle de l'admittance effective w'_e égale à $1/|N'_0|^2$ est égale à l'*unité* pour le pôle de y'_{12}.

Le filtre F″, complémentaire de F′, au sens du § (3.2), a une admittance effective w''_e purement imaginaire à cette même fréquence, comme le montre la relation (2.2) :

$$\Re e\,(w'_e) + \Re e\,(w''_e) = 1/|N'_0|^2 + 1/|N''_0|^2 = 1 + 1/|N''_0|^2 = 1.$$

Le pôle de y'_{12} est donc point d'affaiblissement de tension nul pour le filtre F′ et infini pour le filtre complémentaire F″ : il est donc dans la bande passante du filtre F′.

Une démonstration analogue s'applique au cas des pôles de l'impédance de transfert z'_{12}.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. J. ZOBEL. — » X terminations « U. S. A. pat. 1 557 229 et 1 557 230 (cf. aussi E. GUILLEMIN, Communication Networks, J. WILEY and S., New York, 1947).

[2] H. W. BODE. — A method of Impedance correction, *B. S. T. J.*, oct. 1930, pp. 794-835.

[3] LAURENT, STALEMARK, VOS. — D. R. P. 629 269.

[4] W. CAUER. — Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Leipzig, 1941, pp. 449-493.

[5] W. BRANDT. — Elektrische Weichen, *E. N. T.*, (4), 1936.

[6] E. L. NORTON. — Constant resistance networks with application to filter group, *B. S. T. J*, (4), 1937.

[7] W. CAUER. — Elektrische Weichen, *Mix u. Genest Nachrichten*, (2), 1937.

[8] H. PILOTY. — Über elektrische Weichen, *E. N. T.*, (4), 1937.

[9] W. CAUER. — Frequenz weichen konstanten Betriebswiderständen, *E. N. T.*, (16), 1939.

[10] H. PILOTY. — Weichenfilter, *T. F. T.*, (28), 1939, pp. 291-298 et 333-344.

[11] J. OSWALD. — Filtres en échelle élémentaires, *Câbles & Transmission*, n° 4, 1953.

[12] J. OSWALD et J. DUBOS. — Filtres symétriques en treillis, *Câbles & Transmission*, n° 3, 1955.

[13] V. BELEVITCH. — Elementary Applications of the Scattering Formalism in Network Design, *I. R. E. Transact. of the P. G. C. T.*, juin 1956.

Manuscrit reçu le 14 septembre 1955,
mis sous forme définitive le 29 mars 1957.